Ejercicios surtidos y algunos comentarios

1 Ejercicios

1. Sea L el operador definido por $Lu = (-pu')' + qu$, con $p \in C^1([a, b])$, $q \in C([a, b])$, $p > 0$, $q \geq 0$. Probar:

   (a) $L : H^2 \cap H_0^1(a, b) \to L^2(a, b)$ es un isomorfismo.

   (b) Si G es la función de Green asociada a L, y u_n es la n-ésima autofunción de L con autovalor λ_n, entonces

   $$G(x, y) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) u_n(y)$$

   (c) Calcular

   $$\sum_{n \geq 1} \frac{sen(nx)sen(ny)}{n^2}$$

2. Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tal que

   (a) sop $u = \{0\}$

   (b) $u(\phi_n) \to 0$ para toda sucesión $\{\phi_n\}$ que converge uniformemente a 0.

   Probar que $\widehat{u}$ es constante.

3. Generalización del ejercicio anterior: sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tal que sop $u = \{0\}$, entonces $\widehat{u}$ es un polinomio.

   Aplicación (Teorema de Liouville generalizado):

   Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es armónica tal que

   $$\lim_{|x| \to \infty} \frac{u(x)}{|x|^r} = 0$$

   para cierto $r > 0$, entonces u es un polinomio de grado menor que r.

4. (a) Dada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ continua, decidir si vale la fórmula

   $$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} u(x) dx$$

(b) Calcular $\widehat{u}$ para $u(x) = \cos(2\pi x)$ y determinar su soporte.

(c) Sea $v_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tal que $v_1(e^{-x^2}) = 1$, sop $v_1 = \{1\}$ y $u(\phi_n) \to 0$ para toda sucesión $\{\phi_n\}$ que converge uniformemente a 0. Se definen las distribuciones

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + \widetilde{v_1}), \qquad\qquad w = ixv$$

Calcular $v * v + w * w$.

5. Sea h_n la función definida por $h_n(x) = e^{\frac{\pi}{2}x^2} \frac{\partial}{\partial x^n}(e^{-\pi x^2})$. Probar:

(a) $h_n \in \mathcal{S}(R)$ para todo n.

(b) $\widehat{h_n} = (-i)^n h_n$.

(c) Si H es el subespacio de $\mathcal{S}$ generado por $\{h_n\}$, entonces H se descompone como suma directa $H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3$, con $\widehat{\ }|_{H_k} = i^k$.

(d) Si $n < m$, entonces $\int_{\mathbb{R}} h_n h_m = 0$.

Sugerencia: verificar que $e^{\pi x^2} \frac{\partial}{\partial x^n}(e^{-\pi x^2})$ es un polinomio de grado n (salvo una constante, son los famosos polinomios de Hermite). Se puede demostrar (aunque no es fácil) que $\overline{H} = L^2(\mathbb{R})$.

6. Sea v_N la distribución definida por

$$v_N(\phi) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!(4\pi^2)^n} \phi^{(2n)}(0)$$

Probar que $v_N \to e^{-x^2}$. ¿Contradice esto el hecho de que $sop(v_N) = 0$ para todo N?

2 Una prueba elemental de la convergencia puntual de la serie de Fourier

Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$, sea $\hat{f}_n$ su n-ésimo coeficiente de Fourier en la base dada por $e_n := e^{inx}$, y sea

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e_n.$$

Sin perder generalidad, podemos ver el resultado para $x = 0$, suponiendo $f(0) = 0$. Además supondremos que f es Hölder continua en 0 para cierto $\alpha > 0$. Definimos

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{ix} - 1},$$

entonces $g \in L^1(-\pi, \pi)$, y además

$$\hat{f}_n = \langle f, e_n \rangle = \langle g e_1, e_n \rangle - \langle g, e_n \rangle = \hat{g}_{n-1} - \hat{g}_n.$$

Entonces

$$S_N(0) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{(}g_{n-1} - \hat{g}_n) = \hat{g}_{-(N+1)} - \hat{g}_N.$$

Por el lema de Riemann-Lebesgue, se deduce que $S_N(0) \to 0 = f(0)$.

3 El método de super y sub-soluciones

Consideremos el problema

$$(1) \begin{cases} \Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Por simplicidad, suponemos que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ con $\frac{\partial f}{\partial u}$ continua y $g \in C^2(\overline{\Omega})$. El dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y de frontera suave.

Vamos a probar el siguiente

Teorema 3.1 *Supongamos que existen α, $\beta \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tales que $\alpha \leq \beta$, y además*

$$\Delta\alpha \geq f(x,\alpha), \qquad \Delta\beta \leq f(x,\beta) \quad en \quad \Omega,$$

$$\alpha \leq g \leq \beta \quad en \quad \partial\Omega.$$

Entonces existe u solución clásica de (1), con $\alpha \leq u \leq \beta$.

Para ello, vamos a necesitar dos lemas, el primero de ellos visto en clase:

Lema 3.2 *(Principio del mínimo)*
Sea w suave tal que $w|_{\partial\Omega} \geq 0$ y

$$\Delta w \leq cw \qquad en\ \Omega$$

para cierta constante $c \geq 0$. Entonces $w \geq 0$ en $\overline{\Omega}$.

Lema 3.3 *Existe una constante K tal que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq K\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

para toda $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.

Demostración

Basta verlo para $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ya sabemos que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq k\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ para cierta k. Por otra parte, si $v = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, entonces $\widehat{v}(x) = -4\pi^2 x_i x_j \widehat{u}(x)$, y en consecuencia

$$|\widehat{v}(x)| \leq 2\pi^2(x_i^2 + x_j^2)|\widehat{u}(x)| \leq 2\pi^2|x|^2|\widehat{u}(x)| = \frac{1}{2}|\widehat{\Delta u}(x)|.$$

Esto dice que $\|\widehat{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|\widehat{\Delta u}\|_{L^2(\Omega)}$, y por Plancherel se deduce que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$.

Demostración del teorema

Sea

$$c = \sup_{x\in\overline{\Omega},\alpha(x)\leq u\leq\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial u}(x,u).$$

Consideremos la sucesión definida recursivamente por: $u_0 = \alpha$, y u_{n+1} la única solución del problema lineal

$$\begin{array}{ll} \Delta u_{n+1} - cu_{n+1} = f(x,u_n) - cu_n & \text{en } \Omega \\ u_{n+1} = g & \text{en } \partial\Omega \end{array}$$

Notemos que para cada x fijo la función $f(x,u) - cu$ es decreciente en u, pues su derivada es $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) - c \leq 0$. Se cumple que

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq \beta$$

En efecto, observemos que

$$\Delta u_1 - cu_1 = f(x,\alpha) - c\alpha \leq \Delta\alpha - c\alpha$$

de donde se deduce que

$$\Delta(u_1 - \alpha) - c(u_1 - \alpha) \leq 0$$

Siendo $u_1 - \alpha|_{\partial\Omega} \geq 0$, por el principio del mínimo resulta $u_1 - \alpha \geq 0$, es decir: $u_1 \geq \alpha$. Por otra parte,

$$\Delta u_1 - cu_1 = f(x,\alpha) - c\alpha \geq f(x,\beta) - c\beta \geq \Delta\beta - c\beta,$$

y siendo $u_1 - \beta|_{\partial\Omega} \leq 0$ vale que $u_1 \leq \beta$.

Asumamos como hipótesis inductiva que $u_{n-1} \leq u_n \leq \beta$, entonces:

$$\Delta u_{n+1} - cu_{n+1} = f(x,u_n) - cu_n \leq f(x,u_{n-1}) - cu_{n-1} = \Delta u_n - cu_n$$

y siendo $u_{n+1} - u_n = 0$ en $\partial\Omega$ se deduce que $u_{n+1} \geq u_n$. Del mismo modo,

$$\Delta u_{n+1} - cu_{n+1} = f(x,u_n) - cu_n \geq f(x,\beta) - c\beta,$$

y siendo $u_{n+1} - \beta|_{\partial\Omega} \leq 0$ vale que $u_{n+1} \leq \beta$.

Luego, existe una función u tal que $u_n(x) \to u(x)$ puntualmente.

Usando el lema 3.3 y el hecho de que $\|u_n\|_\infty$ está acotada (pues $\alpha \leq u_n \leq \beta$), obtenemos:

$$\|u_{n+1} - g\|_{H^2(\Omega)} \leq K\|\Delta(u_{n+1} - g)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$= K\|f(\cdot,u_n) + c(u_{n+1} - u_n) - \Delta g\|_{L^2(\Omega)} \leq M$$

para cierta constante M.

Es decir, $\{u_n\}$ está acotada en $H^2(\Omega)$, que está sumergido en $H^1(\Omega)$ en forma compacta. Entonces existe $\{u_{n_j}\}$ convergente en $H^1(\Omega)$, y es fácil ver que el límite de esta subsucesión es u. Se deduce que $u \in H^1(\Omega)$. Por otro lado, para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale que

$$\int_\Omega u_{n+1}\Delta\phi = \int_\Omega \Delta u_{n+1}\phi = \int_\Omega [c(u_{n+1} - u_n) + f(x, u_n)]\phi \to \int_\Omega f(x, u)\phi$$

y también

$$\int_\Omega u_{n_j}\Delta\phi \to \int_\Omega u\Delta\phi$$

En consecuencia,

$$\int_\Omega u\Delta\phi = \int_\Omega f(x, u)\phi,$$

lo que prueba que $\Delta u = \phi$. Notar que en principio resulta que u es solución en sentido distribucional, pero se puede probar que es clásica.