

Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009

EJERCICIOS DE DISTRIBUCIONES

1. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, probar que:
 - (a) La aplicación $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi$ es una distribución.
 - (b) La aplicación $f \rightarrow T_f$ es inyectiva.
 - (c) Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$, entonces $\text{sop}f = \text{sop}T_f$.

2. Sea H la aplicación definida por

$$H(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Probar que:

- (a) H pertenece a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
 - (b) No existe $f \in L^1_{loc}$ tal que $H = T_f$.
3. Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$, y sea $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}g(\frac{x}{\varepsilon})$. Probar que $g_\varepsilon \rightarrow \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
 4. Sea $u(x) = \log|x|$. Probar que $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, y calcular u' .
 5.
 - (a) Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $u' = 0$. Probar que u es constante.
 - (b) Si $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, probar que sus derivadas distribucionales coinciden con las clásicas. Recíprocamente, dada $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial^\alpha u$ es continua para $|\alpha| \leq k$, probar que $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$.
 6.
 - (a) Sean $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, u de soporte compacto. Probar que la aplicación $u*v(\phi) := v(\tilde{u}*\phi)$ está bien definida, y que $u*v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
 - (b) Calcular $\delta * v$.
 7. Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto. Probar que existen $c > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$|u(\phi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

8. Hallar todas las $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tales que

$$a) \quad u' = \delta \qquad b) \quad u'' = \delta$$