Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009

Práctica 8 - Ecuación de Laplace - Ecuación del Calor

1 Funciones Armónicas y Ecuación de Laplace

1. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones armónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u_n \to u$ uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset \Omega$. Probar que u es armónica.

2. Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armónica y acotada. Probar que u es constante.

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$. Probar que
$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

4. Dada $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, u se dice subarmónica si para toda bola $\overline{B} \subset \Omega$ y toda h armónica tal que $u \leq h$ en ∂B vale que $u \leq h$ en B. Probar que u es subarmónica si y sólo si $\Delta u \geq 0$.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, y sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ armónica. Probar que
$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \sup_{x\in\partial\Omega} |u(x)|$$

6. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica. Dado $x \in \Omega$ tal que $B = B_R(x) \subset \Omega$, probar que
$$|\partial_i u(x)| \leq \frac{n}{R}\|u|_{\partial B}\|_\infty$$
Sug: observar que si u es armónica entonces ∇u es armónica.

7. Sea u una solución regular de
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } B_1(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_1(0). \end{cases}$$
Probar que existe una constante C, que depende sólo de la dimensión del espacio, tal que
$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C\left(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |f|\right).$$

8. Notemos por B_1^+ a la semiesfera $\{x \in \mathbb{R}^n / \ |x| < 1, x_1 > 0\}$. Sea $u \in C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ con $u = 0$ en $\partial B_1^+ \cap \{x_1 = 0\}$ y notamos $x = (x_1, x')$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definimos

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_1 \geq 0, \\ -u(-x_1, x') & \text{si } x_1 < 0, \end{cases}$$

para $x \in B_1(0)$. Probar que U es armónica en $B_1(0)$. Concluir que u es C^∞ hasta $\{x_1 = 0\}$.

9. Sea Ω un dominio acotado y sea $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \Delta u_n &= f_n \quad \text{en } \Omega, \\ u_n &= g_n \quad \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que si $f_n \to f$ uniformemente en Ω y que si $g_n \to g$ uniformemente en $\partial\Omega$, entonces existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ uniformemente en Ω y, más aún, u es solución de

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= g \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

en el siguiente sentido "débil":

$$\int_\Omega u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \qquad \text{para toda } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función C^2. Probar que u es armónica si y sólo si existe una función f holomorfa en Ω tal que $u = \mathrm{Re}(f)$. ¿ qué sucede si Ω no es simplemente conexo ?

11. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones armónicas en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u_n \to u$ en $L^2(\Omega)$. Probar que u es igual en casi todo punto a una función armónica.

12. *Principio débil del máximo*

Sea

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u,$$

donde a_i, b_i y c son funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Un operador $\mathcal{L}$ con estas propiedades se dice *elíptico*. Probar que si $\mathcal{L}u \geq 0$ en Ω y $c \equiv 0$ entonces el máximo de u se alcanza en $\partial\Omega$.

13. *Lema de Hopf.* Sea Ω un dominio con la propiedad que para todo $x_0 \in \partial\Omega$, existe una bola $B_r(y) \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B_r(y)$ (esto se conoce como la propiedad de bola tangente interior). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ en Ω, $x_0 \in \partial\Omega$ y $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

14. Sea $\Omega \subset I\!R^n$ un abierto. Probar que si $u \in C^2(\Omega)$ es subarmónica, y $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$ entonces
$$u(x_0) \leq \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} u(x)dx$$
Recíprocamente, probar que esta propiedad caracteriza a las funciones subarmónicas.

15. Sea $\Omega \subset I\!R^n$ un abierto acotado. Probar que si $u \in H_0^1(\Omega)$ minimiza el cociente
$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}$$
entonces existe un $\lambda \in I\!R$ tal que $-\Delta u + \lambda u = 0$,

Una pregunta para pensar: ¿ Qué se puede decir de las autofunciones y autovalores de este problema de Sturm-Liouville ? ¿ Cuáles son los autovalores y las autofunciones si $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$?

2 Ecuación del Calor

16. Sea u una solución regular de $u_t - \Delta u = 0$ en $I\!R^n \times (0, +\infty)$.
    (a) Mostrar que $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in I\!R$.
    (b) Mostrar que $v(x, t) = x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$ también resuelve la ecuación del calor.

17. Sea, para α y β son constantes:
$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \qquad (x \in I\!R^N,\ t > 0),$$

(a) Verificar que u satisface la ecuación del calor si y sólo si v satisface

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(y)+\beta t^{-(\alpha+1)}y\cdot Dv(y)+t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta v(y)=0, \text{ para } y=t^{-\beta}x.$$

(b) Verificar que si $\beta = 1/2$, v satisface

$$\alpha v+\frac{1}{2}y\cdot Dv+\Delta v=0.$$

(c) Verificar que si v es radial, i.e. $v(y)=w(|y|)$ para $w : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si llamamos $r=|y|$, $'=\frac{d}{dr}$, entonces w satisface

$$\alpha w+\frac{1}{2}rw'+w''+\frac{n-1}{r}w'=0.$$

(d) Tomar $\alpha = n/2$ y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

18. Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto. Notamos $U_T=U\times(0,T)$ y $\Gamma_T=\left(\overline{U}\times\{0\}\right)\cup(\partial U\times(0,T))$ la frontera parabólica de U_T. Decimos que $v\in C^{2,1}(U_T)\cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t-\Delta v\le 0 \text{ en } U_T.$$

(a) Probar que

$$v(x,t)\le\frac{C_n}{r^n}\int_{E(x,t;r)}v(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds$$

para todo $E(x,t;r)\subset U_T$.

(b) Probar que $\max_{U_T}v=\max_{\Gamma_T}v$.

(c) Sea $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v=\phi(u)$, entonces v es una subsolución.

(d) Probar que $v=|\nabla u|^2+u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación del calor.

19. Sea u una solución acotada de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}$. Probar que u es constante.