Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009

Práctica 7 - Transformada de Fourier

Obs: la definición de transformada que se usa en esta práctica es:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \mathcal{F}(f)(\xi)$$

1. Probar que para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

   (a) $\left(\widehat{\tau_h f}\right)(\xi) = e^{-2\pi i h\xi}\widehat{f}(\xi)$, con $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$.

   (b) $\left(\widehat{\delta_a f}\right)(\xi) = a^{-n}\widehat{f}(\xi/a)$ con $(\delta_a f)(x) = f(ax)$.

   (c) Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

   (d) Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{\left(\widehat{f}\right)}(x) = f(-x)$

   (e) Calcular las transformadas de Fourier de las siguientes funciones

      i. $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$

      ii. $f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \in [0,2) \\ x+2 & x \in [-2,0) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

      iii. $e^{-4\pi^2 t|x|}$ con $t > 0$. Analizar el caso $t = \frac{1}{4\pi}$

2. (a) Hallar $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ no nulos tales que $f * g = 0$.

   (b) Probar que si $f * f = 0$, entonces $f = 0$.

   (c) Probar que no existe $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f * g = g$ para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Si $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\widehat{f}$ es diferenciable con respecto a ξ_k y:

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k} = \mathcal{F}(-2\pi i x_k f(x))(\xi)$$

   Deducir que si $P(D)$ es un operador diferencial polinomial entonces:

$$P(D)\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(P(-2\pi i x)f(x))(\xi)$$

4. Sea $f \in L^1(I\!R^n)$ y g su derivada (debil) con respecto a la variable x_k. Entonces:

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$$

Deducir que si $P(D)$ es un operador diferencial polinomial entonces:

$$\mathcal{F}(P(D)f)(\xi) = P(2\pi i \xi)\widehat{f}(\xi)$$

5. $f \in L^1(I\!R^n)$ entonces

$$\left\| f(x) - \int_{I\!R^n} e^{2\pi x \xi} e^{-4\pi t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d\xi \right\|_{L^1} \to 0 \text{ cuando } t \to 0$$

Si además f es continua en x_0 entonces la convergencia es puntual:

$$f(x_0) = \lim_{t \to 0} \int_{I\!R^n} e^{2\pi x \xi} e^{-4\pi t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

6. Probar que si $f \in L^2(I\!R^n)$ verifica $\widehat{f} = \lambda f$ entonces $\lambda = i^k$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

7. Calcular $\widehat{f}$ siendo $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$

   Obs: $\frac{sen(x)}{x} \notin L^1(I\!R)$.

8. Obtener expresiones integrales para las soluciones de

   (a) Ecuación del calor

   $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in I\!R \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

   (b) Ecuación de Laplace

   $$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in I\!R \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \\ u(.,y) \in L^2 & \text{para todo } y > 0 \end{cases}$$

(c) Ecuación de ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in I\!R \times I\!R \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

(d) Ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in I\!R \times I\!R \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

(e) Ecuación de Airy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & (x,t) \in I\!R \times I\!R \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

En todos los casos se asume que los datos iniciales pertenecen a $\mathcal{S}(I\!R)$.

9. Dados $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(I\!R)$ se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -u(x,t) \in I\!R^2 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 & (x)\, x \in I\!R \end{cases}$$

(a) Encontrar la transformada de Fourier de: $u(x,t)$, $u_x(x,t)$ y $u_t(x,t)$

(b) Probar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(|u(x,t)|^2 + |u_x(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2 \right) dx$$

es constante para todo $t \in I\!R$.

Sug: Usar la igualdad de Parseval.

10. Sea $T_\varepsilon \in \mathcal{S}'(I\!R)$ definida por

$$T_\varepsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon^2 + x^2} \varphi(x)\, dx$$

(a) Probar que $T_\varepsilon \to H$ si $\varepsilon \searrow 0$.

(b) Ver que $\widehat{T_\varepsilon}(\xi) = c.sgn(\xi)\, e^{-\varepsilon|\xi|}$.

(c) Calcular $\widehat{H}(\xi)$.

11. Dado el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^{2k} u = 0 & (x,t) \in I\!R \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in I\!R \end{cases}$$

(a) Probar que para $t > 0$, existe $P_t \in \mathcal{S}$ tal que

$$u(x,t) = (P_t * u_0)(x)$$

(b) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x)\, dx$

12. Sea $s \in I\!R$, se definen los espacios:

$$\tilde{H}^s(I\!R^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(I\!R^n) : \Lambda^s f(\xi) = (1+\xi^2)^{(s/2)} \widehat{f}(\xi) \in L^2(I\!R^n) \right\}$$

con la norma $\|f\|_s = \|\Lambda^s f\|_{L^2}$

(a) Ver que $\tilde{H}^s$ es un espacio de Hilbert con el producto interno:

$$\langle f, g\rangle_s = \int_{R^n} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi$$

(b) Si $k \in I\!N$ entonces $\tilde{H}^k$ coincide con el espacio de Sobolev H^k:

$$\tilde{H}^k(I\!R^n) = H^k(I\!R^n)$$

(c) Tambien cuando $k \in I\!N$ las normas $\|f\|_k$ y $\|f\|_{H^k}$ son equivalentes.