

Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009

PRÁCTICA 6 - SERIES DE FOURIER - SEPARACIÓN DE VARIABLES

1 Series de Fourier

1. Probar que si f es periódica de período l , entonces para $x \in \mathbb{R}$, vale $\int_0^l f(y)dy = \int_x^{x+l} f(y)dy$.
2. Probar que si f, g son periódicas de período l , entonces

$$(f * g)(x) = \int_0^l f(x-y)g(y)dy$$

también es periódica de período l .

3. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones de $(-\pi, \pi)$
 - (a) $f(x) = \sin(x)$
 - (b) $f(x) = x$
 - (c) $f(x) = \pi^2 - x^2$
 - (d) $f(x) = x(\pi^2 - x^2)$
 - (e) $f(x) = \exp(\alpha e^{ix}) \quad \alpha \in \mathbb{C}$.

Sug: Usar la serie de Taylor de e^z y la unicidad de la serie de Fourier.

4. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in (0, \pi) \\ -\pi - x & \text{si } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

y hallar $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

5. Si $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ calcular la serie de Fourier de
 - (a) $f^*(x) = \overline{f(x)}$
 - (b) $\tilde{f}(x) = f(-x)$
 - (c) $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$

(d) $(\mu_n f)(x) = f(x) e^{inx}$

6. Si $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, escribir la serie de Fourier en la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

7. Sea D_n el núcleo de Dirichlet definido por

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$$

probar que

(a) $s_n f = D_n * f$

(b) $\|D_n\|_{L^1} = O(\log n)$

8. Este ejercicio tiene por objetivo mostrar que existen funciones continuas cuyas series de Fourier no convergen puntualmente. Sea $C_{per}[-\pi, \pi]$ el espacio de funciones continuas de período 2π , se define e_n el funcional lineal dado por $e_n(f) = (s_n f)(0)$. Supongamos que para toda $f \in C_{per}[-\pi, \pi]$ $(s_n f)(0) \rightarrow f(0)$ cuando $n \rightarrow \infty$, valdría entonces

(a) El conjunto $\{e_n\}_{n \geq 1}$ está puntualmente acotado.

(b) El conjunto $\{e_n\}_{n \geq 1}$ está acotado (usar el teorema de Banach-Steinhaus).

(c) Existe $M > 0$ tal que para toda $f \in C_{per}[-\pi, \pi]$ y $n \geq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) dt \leq M \|f\|_{L^\infty}$$

(d) $\|D_n\|_{L^1} \leq M$

2 Separación de variables

9. Resolver separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo

$$\begin{cases} \Delta u & = 0 & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, a) \\ u(x, 0) & = f(x) & \text{para } x \in (0, \pi) \\ u(x, a) & = 0 & \text{para } x \in (0, \pi) \\ u(0, y) & = u(\pi, y) = 0 & \text{para } y \in (0, a) \end{cases}$$

10. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos ($c > 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & (x, t) \in (0, l) \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, l) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x) & x \in (0, l) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

11. Resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = 0 & (x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Sug: considerar $v(x, t) = u(x, t) \exp(ct)$.

12. En los ejercicios anteriores imponer condiciones suficientes para que las series obtenidas sean soluciones del problema considerado.
13. Para cada natural n , se define la función

$$f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \operatorname{sen}(nx)$$

- (a) Resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \\ u_n(x, 0) = f_n(x) & x \in (0, \pi) \\ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u_n(0, y) = u_n(\pi, y) = 0 & y \in (0, 1) \end{cases}$$

- (b) Mostrar que f_n y todas sus derivadas convergen a 0 en $[0, \pi]$ cuando n tiende a $+\infty$, pero que para todo $y > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(\cdot, y)\|_\infty = +\infty$$

14. Hallar las soluciones de la ecuación de Laplace en los siguientes casos:

- (a) De la forma $u = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$ en el cilindro C
 $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, |z| < 1\}$.
- (b) De la forma $u = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$ en la bola B
 $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.