

Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009

Prctica 5 - Ecuaciones de primer orden

1. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

2. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right) & x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x_2, \dots, x_n) = x_2 \end{cases}$$

3. Hallar la solución del siguiente problema y analizar donde está definida

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n x_i^2 & x \in \mathbb{R}^n \\ u(1, x_2, \dots, x_n) = x_n \end{cases}$$

4. Dada la ecuación

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

probar

- (a) Cualquier solución es constante sobre hipérbolas $xy = cte$.
- (b) Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta $u = x = y$.

5. Probar que no existe solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $x = y$.

6. Probar que la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

cuyo gráfico contiene a la recta $u = x = -y$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

7. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y) u \\ u(0, y) = y \end{cases}$$

8. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u = 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \end{cases}$$

suponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f . Estudiar el caso $f(x, y) = xy$.

9. Hallar la solución del problema

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \\ u(x, x) = \frac{x}{2} \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

10. Estudiar el dominio de definición de la solución clásica de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(0, y) = \phi(y) \end{cases}$$

con α y ϕ no constantes.

11. Sea $u(x, t)$ la solución clásica del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = \beta(x, t) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Ver que sobre las curvas características $(x(t), t)$, u se expresa como

$$u(x(t), t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \beta(x(\xi), \xi) d\xi$$

12. Sea la ecuación de primer orden

$$\begin{cases} (1 + x^{2n}) \frac{\partial u}{\partial x} + 2nx^{2n-1}y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x, y) = g(x, y) \quad (x, y) \in \mathcal{E} \end{cases}$$

donde n es un número natural, \mathcal{E} la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y g una función suave.

Dar condiciones sobre g para que la solución clásica esté definida en el interior de la elipse.