Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009

Práctica 4 - Espacios de Sobolev

1 Propiedades

1. Dado $k \in \{0, 1, 2, ...\}$, $1 \leq p \leq \infty$ y notando $D^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f/(\partial x_1^{\alpha_1}, ...\partial x_n^{\alpha_n})$, dado un conjunto $\Omega \subset I\!R^n$ abierto, se definen los Espacios de Sobolev:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \; D^\alpha f \in L^p(\Omega) \, \forall \alpha \in I\!N_0^n : |\alpha| \leq k \; \} \subset L^p(\Omega)$$

Sean $u, \; v \in W^{k,p}(\Omega), \; |\alpha| \leq k$. Entonces

   (a) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ y $D^\beta \left(D^\alpha u\right) = D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u$ para todo par de multiíndices α, β tales que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

   (b) $\forall \, \lambda, \mu \in I\!R$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

   (c) Si $V \subset \Omega$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.

   (d) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la noma:

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

   (e) $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y mostrar el P.I.

2. Sea $\Omega \subset I\!R^n$, probar que en cada clase de $H^1(\Omega)$ existe a lo sumo una función continua.

3. Sea $f \in H^1(a,b)$ y $\{(a_j, b_j)\}_{j \in J}$ una colección de intervalos disjuntos en (a, b), probar que

$$\sum_{j \in J} |f(b_j) - f(a_j)| \leq \|f\|_{H^1} \left(\sum_{j \in J} |b_j - a_j| \right)^{1/2}$$

4. (a) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1(a,b)$ $|f(x)| \leq C\|f\|_{H^1(a,b)}$

(b) Usando el teorema de Arzelá-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1(a,b)$ es precompacto en $C([a,b])$, y por lo tanto en $L^2(a,b)$.

5. Considere la función $u(x,y) = |\ln(x^2+y^2)|^{\frac{1}{3}}$. Probar que $u \in H^1(B_{\frac{1}{2}}(0))$ donde $B_1(0) = \{(x,y) \in I\!R^2, x^2+y^2 < \frac{1}{2}\}$. Concluir que las funciones de H^1 no son necesariamente acotadas y por ende el resultado del ejercicio anterior no se extiende a más dimensiones.

6. Si $(a,b) \subset (c,d)$, probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1(a,b)$ existe $F \in H_0^1(c,d)$ tal que $F \equiv f$ en (a,b) y vale

$$\|F\|_{H^1} \leq C \|f\|_{H^1}$$

7. Probar que existe C tal que para toda $f \in H^1(a,b)$ con $f(a) = 0$

$$|f(x)| \leq C \|f'\|_{L^2}$$

Concluir que $\|f'\|_{L^2}$ es una norma equivalente a $\|f\|_{H^1}$ en $H_0^1(a,b)$.

8. Probar que si $f \in H^2(a,b) \cap H_0^1(a,b)$ entonces

$$\int_a^b |f'|^2 dx \leq C \left(\int_a^b |f|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f''|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Concluir que en $H_0^2(a,b)$, $\|f''\|_{L^2}$ es una norma equivalente a $\|f\|_{H^2}$.

9. Demuestre que las siguientes formas bilineales son continuas y coercivas en los respectivos espacios V

(a) $V = L^2(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0,1]$.

(b) $V = H^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0,1]$.

(c) $V = H_0^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0,1]$.

(d) $V = H^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los items previos, y k constante suficientemente chico. ¿Es esta forma bilineal simétrica?.

(e) $V = H^1(a,b)$, $a(u,v) = \frac{1}{2}[u(a)v(a) + u(b)v(b)] + \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx$

2 Aplicaciones a las EDO y EDP

10. Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{en} \quad (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C([0,1])$.

   (a) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?
   (b) ¿Cómo definiría una solución débil?
   (c) Probar que toda solución clásica es una solución débil.
   (d) Probar que existe una solución única en $H_0^1(0,1)$ de la formulación débil.
   (e) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2([0,1])$), y que proporciona una solución clásica.
   (f) ¿De qué funcional provienen las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema?

11. Considerar el problema de contorno:

$$\begin{cases} -u'' + ku' + u = f \qquad \text{en } (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Hallar una formulación debil, y probar que para k suficientemente pequeño el problema débil tiene solución única. Hallar un valor de k tal que $a(v,v) = 0$ pero $v \not\equiv 0$ para algún $v \in H^1(0,1)$.

12. Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

   (a) Mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución del problema si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx$$

   para toda $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(b) Mostrar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil de este problema.

(c) ¿De qué funcional provienen las ecuaciones de E-L asociadas?

13. Una función $u \in H_0^2(\Omega)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta^2 u & = & f & \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

si verifica

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. $(\Delta^2 u = \Delta(\Delta u))$.

(a) Probar que $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución clásica de la ecuación si y sólo si es solución débil.

(b) Probar que dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^2(\Omega)$.

(c) ¿De qué funcional provienen las ecuaciones de E-L asociadas?

14. Consideremos la siguiente ecuación diferencial elí ptica de segundo orden:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} u_{x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + cu & = & f & \text{en } \Omega \\ u & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

donde

(a) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ con $\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$.

(b) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$.

(c) $b_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $\operatorname{div} b = 0$ en Ω.

Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema. ¿De qué funcional provienen las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema?