Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009

Práctica 3 - Cálculo de Variaciones

1 Ecuación de Euler-Lagrange

1. **Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones:**

   (a) Sea $f \in C([a,b])$. Si para toda función g continua se tiene $\int_a^b fg\,dt = 0$, entonces $f \equiv 0$ en $[a,b]$.

   (b) ¿Es cierto para $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

   (c) ¿Es cierto para $f \in L^1([a,b])$ (es cero en casi todo punto)?

   (d) ¿Alcanza con pedir $g \in C^\infty(a,b)$ de soporte compacto?

2. Dado el funcional $\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(x,\dot{x},t)dt$, consideremos los siguientes casos:

   (a) Si $L = L(x,t)$, no depende de $\dot{x}$, verificar que no siempre existe una solución de la ecuación de Euler-Lagrange asociada que cumpla las condiciones $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

   (b) Verificar que si $L = L(\dot{x})$, todas las extremales son de la forma $x(t) = at + b$.

   (c) Verificar que si $L = L(t,\dot{x})$, las extremales satisfacen

   $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,\dot{x}) = cte.$$

   (d) Verificar que si $L = L(x,\dot{x})$, las extremales satisfacen

   $$L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,\dot{x}) = cte.$$

3. Determinar las trayectorias extremales de las siguientes funcionales

   (a)
   $$\mathcal{J}(x) = \int_{-1}^{0} \left(\dot{x}^2 - 12tx\right) dt,$$
   con las condiciones $x(-1) = 1,\ x(0) = 0$.

(b)
$$\mathcal{J}(x)=\int_1^2\left(\dot{x}^2+2x\dot{+}x^2\right)dt,$$
con las condiciones $x(1)=1,\ x(2)=0.$

(c)
$$\mathcal{J}(x)=\int_0^1\sqrt{x(1+\dot{x}^2)}dt,$$
con las condiciones $x(0)=x(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d)
$$\mathcal{J}(x)=\int_0^1\left(\dot{x}^2-1\right)^2dt,$$
con las condiciones $x(0)=x(1)=0$.

(e)
$$\mathcal{J}(x)=\int_0^1 x^2+2\dot{x}^2+\ddot{x}^2dt,$$
con las condiciones $x(0)=x(1)=0,\quad \dot{x}(0)=1,\dot{x}(1)=senh(-1).$

(f)
$$\mathcal{J}(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2y^2-4x^2+\dot{x}^2-\dot{y}^2)dt,$$
con las condiciones $x(0)=y(0)=0,\quad x(\frac{\pi}{4})=y(\frac{\pi}{4})=1.$

4. **Resistencia mínima en un fluido** Determinar la forma del cuerpo de revolución que al moverse en un fluido encuentra resistencia mínima. La fuerza de resistencia es
$$F\left(y\right)=4\pi\rho v^2\int_0^l y\left(x\right)\,y'\left(x\right)^3dx$$
siendo ρ y v constantes, $y\left(0\right)=0$ y $y\left(l\right)=R$.

5. Probar que si u es una extremal regular de
$$\mathcal{J}(u)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\left|\nabla u\left(x\right)\right|^2+f\left(x\right)u\left(x\right)\right)dx$$
con $\Omega\subset\ R^n$, entonces u satisface la ecuación
$$-\Delta u\left(x\right)=f\left(x\right)$$

6. Obtener la ecuación de Euler-Lagrange del problema de superficies mínimas

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} \left(1 + |\nabla u\,(x)|^2\right)^{1/2} dx$$

2 Problemas con Reestricciones

7. **Restricciones holónomas:** sean $x_1, \ldots, x_n$ extremales de

$$\mathcal{J}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, t)dt$$

restringidas a las superficies

$$G_i(x_1, \ldots, x_n, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq m < n.$$

Verificar que las $n+m$ funciones $x_1, \ldots, x_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional

$$\hat{\mathcal{J}} = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(L + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t) G_i\right) dt$$

y que estas ecuaciones son

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial \hat{L}}{\partial x_j} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}_j}\right) & = & 0 & \quad 1 \leq j \leq n \\ G(i) & = & 0 & \quad 1 \leq i \leq m \end{array} \right.$$

Sug: Como $G_i(x_1+\delta x_1, \ldots, x_n \delta x_n, t) = 0$, las variaciones δx_j satisfacen

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \cdot \delta x_j = 0.$$

8. **Restricciones no holónomas:** sean $x_1, \ldots, x_n$ extremales de

$$\mathcal{J}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, t)dt.$$

Considere las restricciones dadas por las ecuaciones diferenciales

$$G_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

determine el nuevo funcional, y calcule las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes.

9. **Restricciones integrales:** sean $x_1, \ldots, x_n$ extremales de

$$\mathcal{J}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, t)dt$$

con las restricciones

$$\int_{t_0}^{t_1} G_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Verifique que $x_1, \ldots, x_n$ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional

$$\hat{\mathcal{J}} = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(L + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \right) dt$$

(con λ_i constantes), y que estas ecuaciones son

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{L}}{\partial x_j} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}_j}\right) = 0 & 1 \leq j \leq n \\ \\ G(i) = 0 & 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Sug: Reduzca el problema al caso no holónomo, introduciendo las funciones $z_i(s) = \int_{t_0}^{s} G_i dt$ y el funcional auxiliar

$$\tilde{\mathcal{J}} = \int_{t_0}^{t_1} \left(L + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)(G_i - z_i') \right) dt.$$

10. Hallar la ecuación de Euler-Lagrange de la funcional

$$\int_0^1 p\dot{x}^2 + qx^2 dt$$

sujeto a

$$\int_0^1 x^2 dt = 1$$

donde p es diferenciable y positiva, q es continua.

11. Hallar la curva de longitud mínima sobre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ que une los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$.