**Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009**

Práctica 2 - Problema de Sturm-Liouville

# 1 Función de Green

1. Construir la función de Green asociada al problema

$$\begin{cases} -u'' = f(t) \\ \\ u(0) = 0, \; u(1) = 0 \end{cases}$$

2. Resolver los siguientes problemas usando la función de Green

$$(a) \begin{cases} -u''(t) + u(t) = t & t \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} -u''(t) + u(t) = sin(t) & t \in (0,2\pi) \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -u''(t) + u(t) = e^t & t \in (-1,1) \\ u(-1) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

3. Sea $u$ una solución no trivial de $u'' + qu = 0$.

   (a) Si $q > 0$ en $(0, +\infty)$ y $\int_0^{+\infty} q(t)dt = \infty$, probar que $u$ tiene infinitos ceros positivos. (Sugerencia: suponer que existe un último cero en $t_f$, e integrar por partes la equación $-\frac{u''}{u} = q$).

   (b) ¿ Vale el resultado sin la hipótesis $\int_0^{+\infty} q(t)dt = \infty$? Considerar el caso $q(t) = \frac{\lambda}{t^2}$.

   (c) Si $q \leq 0$, probar que $u'u$ es creciente, y que $u$ tiene a lo sumo un cero.

4. Sean $u, v$ tales que

$$-(pu')' + qu = 0$$
$$-(pv')' + \overline{q}v = 0$$

en donde $q \geq \overline{q}$. Si $a$ y $b$ son dos ceros consecutivos de $u$, probar que $v$ se anula en $(a, b)$ o $v$ es un múltiplo de $u$ (y $\overline{q} = q$).

# 2 Autovalores y autofunciones

5. Dado el problema

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda \rho u & , a < t < b \\ \\ u(a) = 0, \ u(b) = 0 \end{cases}$$

donde $p \in C^1[a, b]$ $q, \rho \in C[a, b]$ $p, \rho > 0$ $q \geq 0$. Probar

(a) El autoespacio asociado a un autovalor $\lambda$ tiene dimensión 1.

(b) Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales en $L^2_\rho[a, b]$.

(c) Todos los autovalores son positivos.

6. Consideremos el problema del ejercicio anterior. Probar

(a) La autofunción $u_0$ asociada al menor autovalor $\lambda_0$ no se anula en $[a, b]$ (en particular $u_0$ no cambia de signo).

(b) La $n$-ésima autofunción $u_n$ tiene por lo menos $n$ ceros en $(a, b)$.

(c) Si $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son dos ceros consecutivos de una autofunción $u_n$ del problema, entonces $u_n$ es la autofunción asociada al menor autovalor del problema equivalente en el intervalo $[\overline{a}, \overline{b}]$.

(d) Si $[\overline{a}, \overline{b}] \subseteq [a, b]$, $\overline{p} \geq p$, $\overline{q} \geq q$, $\overline{\rho} \leq \rho$, el menor autovalor $\overline{\lambda}_0$ de

$$\begin{cases} -(\overline{p}u')' + \overline{q}u = \overline{\lambda}\,\overline{\rho}u & \overline{a} < t < \overline{b} \\ \\ u(\overline{a}) = 0, \ u(\overline{b}) = 0 \end{cases}$$

verifica $\overline{\lambda}_0 \geq \lambda_0$.

(e) Probar que $\overline{\lambda}_n \geq \lambda_n \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$.

7. Hallar cotas para el $n$-ésimo autovalor de

$$\begin{cases} -\left(\left(1+t^2\right)u'\right)' + tu = \lambda u & ,0 < t < 1 \\ \\ u\left(0\right) = 0,\ u\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

8. Dada la ecuación $-u'' + tu = 0$ . Probar

   (a) Sus soluciones poseen infinitos ceros en el semieje positivo y a lo sumo uno en el negativo.

   (b) Si $u$ es solución, $v\left(t\right) = u\left(kt\right)$ es solución de $-v'' + k^2 tv = 0$

   (c) El problema

$$\begin{cases} -u'' + tu = \lambda u & ,0 < t < 1 \\ \\ u\left(0\right) = 0,\ u\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

   no tiene autovalores negativos.

9. Sean $p\left(t\right) = 5 - 3t^2$ y $q\left(t\right) = -6$

   (a) Obtener acotaciones para $\lambda_k/k^2$, donde $\lambda_k$ representa el $k$-ésimo autovalor del problema

$$\begin{cases} -\left(pu'\right)' + qu = \lambda u \\ \\ u\left(0\right) = 0,\ u\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

   (b) Probar que si $u$ es autofunción, entonces $u \in C^\infty\left(0, 1\right)$.

   (c) Verificar que $u\left(t\right) = t\left(1 - t^2\right)$ es autofunción.

   (d) Probar que para toda $u \in C^2\left[0, 1\right]$ que verifica $u\left(0\right) = 0,\ u\left(1\right) = 0$ vale

$$\int_0^1 p\left(u'\right)^2 dt \geq 36 \int_0^1 u^2 dt$$