Ecuaciones Diferenciales - 2° cuatrimestre 2009

Práctica 1 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1 Teoría General

1. Sea $\Omega \subset I\!R^2$ un abierto, $f : \Omega \to I\!R^n$ una función continua, e $y = y(t)$: $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to I\!R$. Probar que son equivalentes:

   (a) $y \in C^1[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y es una solución del problema de valores iniciales:
   $$\text{(PVI)} \begin{cases} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}$$

   (b) $y \in C[0, T]$ es una solución de la ecuación integral
   $$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

2. En la situación anterior definamos un operador $K : C[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ por:
   $$Ky(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$
   Probar que si f es localmente Lipschitz en la segunda variable, y δ es suficientemente chico, entonces K es una contracción en el espacio de Banach $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Deducir que el problema de valores iniciales tiene solución única en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

3. Si en lugar de tener una ecuación tenemos un sistema:
   $$\begin{cases} y_i'(t) & = & f_i(t, y_1, ...y_n) \\ y_i(t_0) & = & y_{0i} \end{cases} \quad \text{con } 1 \le i \le n$$
   ¿Cómo se puede adaptar el argumento anterior? ¿Qué podemos decir acerca de un problema de valores iniciales de orden superior?:
   $$y^{(n)} = f(t, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

4. En general no es posible obtener soluciones globales (definidas para todo t) del problema de valores iniciales (PVI) (Ejercicio 1).

   (a) Si en un intervalo $[t_0, T)$ (sin importar cuán grande es la T) tenemos dos soluciones para el (PVI) con f localmente Lipschitz , probar que coinciden en todo el intervalo $[0, T)$.

   (b) Si $I = [0, t^*)$ es el intervalo maximal de existencia (el mayor intervalo en el que existe solución), probar que

   $$\lim_{t \to t^*} |y(t)| = +\infty$$

   (Sugerencia: Ver que si y se mantuviera acotada cerca de t^*, se la podría prolongar).

5. Supongamos ahora que $f : I\!R^2 \to I\!R$ es globalmente Lipschitz en y, con la constante de Lipschitz independiente de $t \in [t_0, T]$:

   $$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in I\!R, \quad \forall t \in [t_0, T]$$

   Probar que si n es suficientemente grande, K^n (con K como en el Ejercicio 2) es una contracción en $C([t_0, T])$, cuyo único punto fijo es la única solución del (PVI).

6. Si $A \in C^1(I\!R, I\!R^{n \times n})$ entonces el sistema lineal

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & A(t)y(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \in I\!R^n \end{array} \right.$$

   tiene una solución única definida para todo t.

7. Consideremos el problema:

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(y(t)) \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

   con $f : I\!R \to I\!R$ una función C^1 y $f(y) > 0$ para todo y. Probar que la solución de y es global si y sólo si la integral $\int_0^\infty \frac{dy}{f(y)}$ diverge.

2 Propiedades y Aplicaciones

8. **Lema de Gronwall:** Sean $u, v \in C([t_0, t])$ no negativas $(u, v \geq 0)$ tales que para $\alpha \geq 0$

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} u(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Probar que entonces

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)$$

En particular, si $\alpha = 0$, entonces $u \equiv 0$.

9. **Dependencia Continua:** Con las hipótesis del Ejercicio 1 probar que la solución del problema (PVI) depende continuamente del dato inicial y_0. Formule además esta afirmación de manera precisa.

10. **Flujo:** Consideremos un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Se define el flujo del campo f como la aplicación $\phi(t, x) = \phi_t(x) = y(x)$, donde y es la única solución del problema:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(y(t)) \\ y(0) &= x \end{cases}$$

Probar que $\{\phi_t\}$ siempre y cuando s, t sean suficientemente chicos cumple con las propiedades (forma un grupo local a un parámetro):

(a) $\phi_0 = Id$.

(b) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$.

(c) $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$.

11. Sean $y(t)$ e $z(t)$ respectivamente soluciones de los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'(t) &= g(t, z(t)) \\ z(t_0) &= z_0 \end{cases}$$

Probar que si f, g están acotadas, entonces el flujo es continuo respecto al campo de velocidades (es decir que si el segundo miembro cambia poco, también variarán poco los flujos).