ANALISIS NUMERICO — Práctica 3

Segundo Cuatrimestre de 2009

Ejercicio 1. i) Probar que la función definida como $h(x) = \exp(-1/x^2)$ para $x > 0$, $h(x) = 0$ para $x \leq 0$, pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$.

ii) Probar que la función $g(x) = h(x-a)h(b-x)$, $a < b$ es $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $[a, b]$.

iii) Construir una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en una bola o en un intervalo.

Ejercicio 2. Sea $I = (-1, 1)$. Comprobar que:

i) La función $u(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y que $u' = H$, donde H es la función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

ii) La función $H \notin W^{1,p}$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 3. i) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\; dx = 0$ para toda $g \in L^2(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

ii) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\; dx = 0$ para toda $g \in C_0^k(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

iii) Sea $f \in L^2(I)$ tal que $\int_I fg\; dx = 0$ para toda $g \in C_0^\infty(I)$. Probar que $f = 0$ c.t.p.

Ejercicio 4.

1. Demuestre que si $f, g \in L^p$ son tales que $\int_I f\phi' = -\int_I g\phi$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces g es única.
2. Si la $f \in L^p$ del item previo es derivable entonces $f' = g$.

Ejercicio 5.

1. Considere una función $\psi \in C_0^0(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$ pruebe que $\theta = \omega - (\int_I \omega)\psi \in C_0^0(I)$ para todo $\omega \in C_0^1(I)$, ademas $\int_I \theta = 0$.
2. Si $I = (a, b)$, defina $\phi(x) = \int_a^x \theta$ y pruebe que $\phi(x) \in C_0^1(I)$, más aún $\phi' = \theta$.
3. Si f en L^1_{loc} y $\int_I f\phi' = 0$ para toda $\phi \in C_0^1(I)$ entonces $f = cte$ c.t.p. (Sug. tome ϕ como en el item previo y utilice el Ejercicio 3).

Ejercicio 6. Si $g \in L^1_{loc}(I)$ tome $c \in I$ cualquiera, y escriba para $x \in I$ $\int_c^x g = v(x)$, entonces $\int_I v\phi' = -\int_I g\phi$ para todo $\phi \in C_0^1(I)$.

Ejercicio 7. Utilizando el ejercicio previo y tomando f y g como en el ejercicio 4 deduzca la identidad $f(x) = f(c) + \int_c^x g$ para casi todo x.

Ejercicio 8. Utilizando el ejercicio previo demuestre que si $f \in H^1(I)$ entonces $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$.

Ejercicio 9. Usando el ejercicio previo demuestre que si $u \in H_0^1(I)$, con $I = (a, b)$ entonces $u(a) = u(b) = 0$. Pruebe utilizando este hecho que para I acotado en $\mathbb{R}$existe una constante C (dependiente de $|I|$) tal que

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1 \qquad \text{(Desigualdad de Poincaré)}$$

y por ende

$$\|u\|_{H^1(0,1)} \leq C\|u'\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1$$

Ejercicio 10. Sea

$$u(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|^\epsilon}$$

con $0 < \epsilon < 1$ y $(x, y) \in B_R(0)$.

Probar que u tiene derivadas generalizadas de primer orden en $L^2(B_R(0))$; $u \in H^1(B_R(0))$ pero u no tiene representante continuo en $B_R(0)$.

Ejercicio 11. i) Demuestre que la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2)|^{\frac{1}{3}}$$

está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$ donde $B_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$.
ii) Para que valores de α la función

$$u(x, y) = |\ln(x^2 + y^2))|^\alpha$$

está en $H^1(B_{\frac{1}{2}})$?

Concluir que las funciones de H^1 no son necesariamente acotadas y por ende el resultado del ej. 8 no se extiende a más dimensiones.

Notación: *Designaremos con* $V = \{v \ : \ v$ *es una función continua definida en [0,1], que tiene derivada* v' *continua a trozos y acotada en [0,1], y que satisface* $v(0) = v(1) = 0$ $\}$. *Notaremos* $< u, v >= \displaystyle\int_0^1 uv \, dx$.

Llamaremos (D) al siguiente problema de valores de contorno para la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde f *es una función continua dada.*

Con (M) designaremos al problema de minimización:

Hallar $u \in V$ tal que $F(u) \leq F(v) \ \ \forall v \in V$

y con (V) llamaremos al problema variacional:

Encontrar $u \in V$ tal que $< u', v' >=< f, v > \ \ \forall v \in V$.

En todos los casos $F(v) = \dfrac{1}{2} < v', v' > - < f, v >$.

Ejercicio 12. Probar que si w es continua en $[0,1]$ y $\displaystyle\int_0^1 wv\ dx = 0 \quad \forall v \in V$, entonces $w(x) = 0\ \forall x \in [0,1]$.

Ejercicio 13. Probar que si u satisface el problema (V), y u'' existe en el sentido habitual y es continua, u es también solución del problema (D).

Ejercicio 14. Demuestre que las siguientes formas bilineales son continuas y coercivas en los respectivos espacios V

1. $V = \mathbb{R}^n$, $a(u,v) = vAu^t$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A definida positiva.
2. $V = L^2(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\rho(x)dx$, con $\rho(x) > 0$ y continua en $[0,1]$.
3. $V = H^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 (u(x)v(x)\rho_1(x) + u'(x)v'(x)\rho_2(x))dx$, con $\rho_i(x) > 0$ y continuas en $[0,1]$.
4. $V = H_0^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\rho(x)dx$, $\rho(x) > 0$, continua en $[0,1]$.
5. $V = H^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x)\rho_1(x) + ku'(x)v(x) + u(x)v(x)\rho_2(x))dx$ con ρ_i como en los items previos, y k constante suficientemente chico. Es esta forma bilineal simétrica?

Ejercicio 15. Considerar el problema:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{I})$.

i) ¿Qué se considera una solución clásica del problema?

ii) ¿Cómo definiría una solución débil?

iii) Probar que toda solución clásica es una solución débil.

iv) Probar que existe una solución única en $H_0^1(I)$ de la formulación débil.

v) Probar que la solución débil es suficientemente regular (esto es, que pertenece a $C^2(\overline{I})$), y que proporciona una solución clásica.

Ejercicio 16. Realizar el análisis del ejercicio anterior para el problema no homogéneo:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0,1) \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta \end{cases}$$

con α y $\beta \in \mathbb{R}$, y f una función prefijada en $C(\overline{I})$.

Ejercicio 17. Realizar un análisis similar para el problema con condiciones de Neumann homogéneas:

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I = (0,1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

con f una función prefijada en $C(\overline{I})$.

Ejercicio 18. Considerar el problema de contorno:

$$-u'' + ku' + u = f \quad \text{en } [0,1] \qquad u'(0) = u'(1) = 0$$

Hallar una formulación variacional, y probar que para k suficientemente pequeño el problema variacional tiene solución única. Hallar un valor de k tal que $a(v, v) = 0$ pero $v \not\equiv 0$ para algún $v \in H^1$.

Ejercicio 19. Probar que el espacio vectorial V de las poligonales con vértices en $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\phi, \psi) = \displaystyle\sum_0^n \phi(x_i)\psi(x_i)$.

Ejercicio 20. Considere una partición uniforme del intervalo $(0, 1)$, $\bigcup_1^N I_i = (0, 1)$. Construya el sistema lineal resultante, para las ecuaciones dadas en los Ejercicios 15, 17, al realizar aproximaciones de Galerkin con

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0(0, 1), \quad \text{tales que} \quad \phi \quad \text{es lineal en cada} \quad I_i\}$$

defininiendo las condiciones de borde adecuadas en cada caso.

Ejercicio 21. Encontrar la solución discreta correspondiente al problema variacional:

$$\textit{hallar } u \in H_0^1(I) \textit{ tal que } < u', v' > = < 1, v > \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

utilizando discretizaciones con 2, 4, 8 y 16 elementos. Usar elementos lineales, y cuadráticos. En cada caso calcular las normas $\|u - u_h\|_{L^\infty}$, $\|u - u_h\|_{L^2}$, y $\|u - u_h\|_{H^1(I)}$ (donde u es la solución clásica), y graficarlas en función de h.

Ejercicio 22. Para el espacio

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0(0, 1), \quad \text{tales que} \quad \phi \quad \text{es cuadrática en cada} \quad I_i\}$$

construya bases adecuadas y obtenga la matriz de rigidez para el problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 23. Sea $I = (0, 1)$ y sean x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ una partición de I.

1. Definimos para cada $1 \leq i \leq N - 1$, $\quad G_i(x) = \begin{cases} (1 - x_i)x & 0 \leq x \leq x_i \\ x_i(1 - x) & x_i \leq x \leq 1 \end{cases}$

   verifique que $G_i \in H_0^1(0, 1)$ y que $\forall w \in H_0^1(0, 1)$ se tiene que

   $$\int_0^1 w'(s) G_i'(s) ds = w(x_i)$$

2. Dada $f \in L^2(0,1)$ considere el problema

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

escríbalo en forma variacional sobre H_0^1 y escriba la formulación aproximada de Galerkin utilizando el espacio

$$V_h = \{u \in H_0^1 \ \text{ tal que } \ u \in P_1(I_i) \ \text{ para todo } \ 0 \leq i \leq N-1\}$$

a) Demuestre que ambos problemas variacionales tienen solución única.
b) Demuestre que $\int_0^1 (u - u_h)' v_h' = 0$ para todo $v_h \in V_h$. De aquí y del item previo concluya que $u(x_i) = u_h(x_i)$, i.e, la solución obtenida numéricamente interpola a u en los nodos (aquí u_h denota la solución del problema discreto).

3. Hallar la matriz de rigidez (usando las bases de Lagrange).

Ejercicio 24. Considere el problema de contorno:

$$\begin{cases} u''''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Aquí u representa, por ejemplo, la deflexión de una barra empotrada en sus extremos y sujeta a una fuerza transversal de intensidad f.
Llevar el problema a la forma débil:
Hallar $u \in H_0^2(0,1)$ tal que

$$< u'', v'' > = < f, v > \qquad \forall v \in H_0^2(0,1)$$

demuestre que este problema variacional tiene solución única.

Ejercicio 25. Defina

$$V_h = \{\phi \in \mathcal{C}^0([0,1]), \ \text{ tales que } \ \phi \ \text{ es cúbica en cada } \ I_i\}$$

y pruebe que en general V_h no está incluido en H^2. Piense cómo definir un subespacio $W_h \subset V_h$ tal que $W_h \subset H_0^2$. Construya las bases para W_h.