

# ANÁLISIS NUMÉRICO — Práctica 2

Segundo Cuatrimestre de 2009

**Ejercicio 1** i) Sea  $a > 0$ , resuelva la ecuación  $u_t + au_x = 0$ , en toda la recta, con dato inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

ii) Proceda análogamente con  $u_t - au_x = 0$ .

iii) Reemplace  $e^{i(kx+\omega t)}$  en ambas ecuaciones y halle  $\omega$  en cada caso. Concluya que ningún modo es amortiguado y que en un lapso  $\Delta t$  su fase cambia en  $-ak\Delta t$ .

**Ejercicio 2** Considerar la ecuación  $u_t + au_x = 0$ . Decidir para qué valores de los parámetros de discretización en  $x$  y en  $t$  son estables los métodos explícito e implícito de primer orden en  $x$  y en  $t$ , discretizando la derivada espacial corriente arriba (up-wind).

**Ejercicio 3** Verifique que el esquema explícito con up-wind para la ecuación

$$u_t + u_x = 0$$

puede escribirse como:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

observe que esta expresión da un esquema centrado en  $x$  para

$$u_t + u_x = \frac{\Delta x}{2} u_{xx}$$

Concluya que el método up-wind puede interpretarse como un esquema centrado en  $x$  para la ecuación de transporte al cual se le agrega "difusión artificial". Compare el orden del esquema up-wind con la de este último. Encuentra alguna contradicción?

**Ejercicio 4** Demostrar el siguiente resultado. Si  $q(x) \approx c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \dots$  para  $x \approx 0$  entonces

$$\arctg(q(x)) = c_1x + c_2x^2 + (c_3 - \frac{1}{3}c_1^3)x^3 \dots$$

si  $x \approx 0$ .

**Ejercicio 5** Analice los modos de Fourier cuando se utiliza up-wind. Estudie los errores del factor de amortiguamiento  $\lambda(k)$  y de fase para el  $k$ -ésimo modo. Resuelva numéricamente el problema  $u_t + u_x = 0$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$  (característica del intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$ ). Grafique la solución numérica vs. la exacta para distintos valores de tiempo y compare con los resultados obtenidos.

**Ejercicio 6** Considere  $a > 0$  constante. Se define el método de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}a\nu(1 + a\nu)u_{j-1}^n + (1 - a^2\nu^2)u_j^n - \frac{1}{2}a\nu(1 - a\nu)u_{j+1}^n \quad \nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

para aproximar las soluciones de

$$u_t + au_x = 0$$

Halle el error de truncado. Analice la estabilidad por el método de Fourier y realice un análisis similar al del ejercicio anterior con los modos de Fourier. Resuelva numéricamente el mismo problema allí propuesto con este esquema y compare.

**Ejercicio 7** i) Probar que las soluciones de la ecuación

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad x \in [a, b]$$

satisfacen:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u dx = f(u(t, a)) - f(u(t, b))$$

ii) Probar que la discretización

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \frac{f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)}{h} = 0$$

satisface una relación análoga.

iii) Analizar qué ocurre con la discretización:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + f'(u_i^n) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0$$

¿Qué error de truncado poseen estos esquemas?

**Ejercicio 8** Considerar la ecuación

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1}$$

y verifique que para  $u$  y  $f$  suficientemente regular

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) - \Delta t f(u)_x(t_n, x_j) + \frac{(\Delta t)^2}{2} (f'(u) f(u)_x)_x(t_n, x_j) + O(\Delta t^3)$$

deduzca de aquí el esquema de Lax-Wendroff para la ley de conservación (1)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} \nu \{ (1 - a_{j+1/2}^n \nu) (f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)) + (1 + a_{j-1/2}^n \nu) (f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)) \}$$

donde  $a_{j+1/2}^n = f'(u_{j+1/2}^n)$ ,  $a_{j-1/2}^n = f'(u_{j-1/2}^n)$ . Observe que si  $f' = cte$  se obtiene el esquema del ejercicio 6).

**Ejercicio 9** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

realice un estudio similar al de los ejercicios 5 y 6, para el esquema (Box Scheme)

$$\frac{1}{2} \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n) + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{\Delta t} + a \frac{1}{2} \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x} = 0$$

Piense cómo “despejar” el término de la capa  $n+1$ . Puede intuir el despeje correcto utilizando la condición CFL. Estudie qué tipo de condiciones de contorno necesita el esquema.

**Ejercicio 10** Para la ecuación  $u_t + u_x = 0$ , se propone el esquema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + (1 - \alpha) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

con  $0 \leq \alpha \leq 1$

1. Hallar el error de truncado. Para que valores de  $\alpha$  se tiene el mayor orden?
2. Analice que restricción debe imponerse sobre  $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  para que se satisfaga la condición CFL. Hay algún  $\alpha$  para el cual la condición CFL no se cumple independientemente de la elección de  $\nu$ ?
3. Analice la estabilidad de los métodos correspondientes a  $\alpha = 0$  y  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

**Ejercicio 11** Analizar la estabilidad de la ecuación en diferencias obtenida discretizando por diferencias centradas la parte espacial y con un método explícito de primer orden en  $t$  la ecuación diferencial:

$$u_t + au_x = bu_{xx} \quad a > 0, b > 0$$

¿Coinciden los resultados con los que corresponden a los casos límite  $a = 0$  (problema sin convección) y  $b = 0$  (problema sin difusión)?

**Ejercicio 12** Considerar la ecuación en derivadas parciales de primer orden (caso particular de (1) con  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ ):

$$u_t + uu_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

con dato inicial

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

1. Verifique que la solución queda definida implícitamente por  $u = u_0(x - ut)$ .
2. Las curvas características son de la forma  $(x(t), t)$  con  $x(t) = x_0 + tu_0(x_0)$ .
3. Demuestre que  $u_x = \frac{u'_0(x-ut)}{1+tu'_0(x-ut)}$  y por ende si para algún  $x_0$  es  $u'_0(x_0) < 0$  entonces existe un tiempo crítico  $t_c$  en el cual deja de existir  $u_x$ . Haga la misma cuenta para  $u_t$ .

**Ejercicio 13** Resolver numéricamente el problema del ejercicio previo.

1. Utilizar como dato inicial  $u_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ . Resolver utilizando el método explícito de primer orden en  $t$ :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t u_i^n \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right)$$

¿Necesita una condición de contorno a la derecha? Utilice  $\Delta x = 0.1$ . Pruebe con valores de  $\Delta t = 0.2$ , y  $\Delta t = 0.05$ . ¿Qué observa?

2. Repetir el análisis para  $u_0(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ .
3. Para el problema del ítem ii) utilizar el esquema explícito con "up-wind":

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t u_i^n \left( \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right)$$

Utilizar  $\Delta x = 0.1$ , y  $\Delta t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ , y  $\Delta t = 0.001$  Analizar los resultados.

**Ejercicio 14** Considere las siguientes discretizaciones de la ecuación de ondas (para este caso  $r = (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2$ )

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \frac{1}{2}r\{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})\}$$

estudie consistencia y estabilidad de ambos esquemas.

**Ejercicio 15** La función  $u$  satisface la ecuación:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad x \in [0, 1]$$

con condiciones de contorno  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ ,  $t > 0$  y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \frac{1}{8} \sin(\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

Usar la representación usual de las derivadas segundas, y una aproximación por diferencias centradas para la condición inicial sobre la derivada, para calcular numéricamente una solución para  $t = 0.5, t = 1$ , con  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.1$ .

Hallar la solución analítica, y calcular el error de la solución numérica.

**Ejercicio 16** i) Escribir la ecuación de onda  $u_{tt} = u_{xx}$  como un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden (defina  $p = u_x$  y  $q = u_t$ ).

ii) Discretizar las ecuaciones obtenidas según:

$$\frac{1}{2\Delta x}(p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) = \frac{1}{\Delta t}(q_{i,j+1} - \frac{1}{2}(q_{i+1,j} + q_{i-1,j}))$$

$$\frac{1}{2\Delta x}(q_{i+1,j} - q_{i-1,j}) = \frac{1}{\Delta t}(p_{i,j+1} - \frac{1}{2}(p_{i+1,j} + p_{i-1,j}))$$

Probar que esta discretización es estable para  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

**Ejercicio 17** Dada la ecuación  $U_t + aU_x = 0$  con  $a \in \mathbb{R}$  y  $U(x, 0) = U_0(x)$  se propone el esquema a tres capas dado por:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

1. Analice que restricción debe imponerse para que se satisfaga la condición CFL.
2. ¿Cómo aproximaría el valor de la solución a tiempo  $\Delta t$ ? ¿Qué condición de borde impondría para resolver el problema numéricamente?
3. Considere  $a > 0$  y demuestre que si  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{a}$  el método resulta estable.
4. Estudie el factor de amortiguamiento y cambio de fase en función de los modos de Fourier.