
ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN CS. BIOLÓGICAS)

Segundo cuatrimestre de 2009

Práctica 6: Integración

Ejercicio 1.

(a) Hallar en cada caso una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla

(i) $g'(x) = 2$

(v) $g'(x) = x^2$

(ii) $g'(x) = x$

(vi) $g'(x) = e^x$

(iii) $g'(x) = \text{sen } x$

(vii) $g'(x) = x + x^2$

(iv) $g'(x) = \text{cos } x$

(viii) $g'(x) = x^n$

(b) ¿Son únicas las funciones halladas?

(c) Para cada uno de los ítems (i) a (iv) hallar una función g que cumpla, además, $g(0) = 5$.

(d) Para cada uno de los ítems (v) a (viii) hallar una función g que cumpla, además, $g(1) = -1$.

Ejercicio 2. Verifique en cada caso que $F(x) + C$ (para $C \in \mathbb{R}$) son primitivas de $f(x)$.

(a) $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \neq -1 \quad F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x} \quad F(x) = \ln |x|$

(c) $f(x) = e^x \quad F(x) = e^x$

(d) $f(x) = \text{sen } x \quad F(x) = -\text{cos } x$

(e) $f(x) = \text{cos } x \quad F(x) = \text{sen } x$

(f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad F(x) = \text{arc sen } x$

(g) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad F(x) = \text{arc cos } x$

(h) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad F(x) = \text{arc tg } x$

(i) $f(x) = \frac{1}{\text{cos}^2 x} \quad F(x) = \text{tg } x$

$$(j) \quad f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad F(x) = -\operatorname{cotg} x$$

Ejercicio 3. Calcule las siguientes primitivas

$$(a) \quad \int x^2 dx$$

$$(e) \quad \int \left(\frac{1}{x} + 2x - e^x \right) dx$$

$$(b) \quad \int x^{100} dx$$

$$(f) \quad \int x^{-\frac{1}{2}}(3x + \sqrt{x}) dx$$

$$(c) \quad \int \sqrt{x} dx$$

$$(g) \quad \int \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 dx$$

$$(d) \quad \int (3x - \cos x + 2 \operatorname{sen} x) dx$$

$$(h) \quad \int \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x} dx$$

Ejercicio 4. Aplicando el método de sustitución calcule las siguientes primitivas

$$(a) \quad \int 5 \cos(5x) dx$$

$$(j) \quad \int x(x^2 + 1)^{-1} dx$$

$$(b) \quad \int \cos(x + 5) dx$$

$$(k) \quad \int \cos x \operatorname{sen}^{-2} x dx$$

$$(c) \quad \int \operatorname{sen}(7x) dx$$

$$(l) \quad \int (5 - 2x)^{-1} dx$$

$$(d) \quad \int (t + 1)(t^2 + 2t + 3)^{\frac{2}{3}} dt$$

$$(m) \quad \int \cos^{-2}(2x) dx$$

$$(e) \quad \int e^{3x} dx$$

$$(n) \quad \int x^{-1} \cos(\ln x) dx$$

$$(f) \quad \int (x + 1)^{-1} dx$$

$$(\tilde{n}) \quad \int x(1 + 3x^2)^{-1} dx$$

$$(g) \quad \int x^{-1} \ln x dx$$

$$(o) \quad \int (1 + y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} dy$$

$$(h) \quad \int (x + 1)^{-1} \ln(x + 1) dx$$

$$(p) \quad \int (x^2 + 2x + 5)^{-1} dx$$

$$(i) \quad \int x e^{x^2} dx$$

$$(q) \quad \int x(16 + x^4)^{-1} dx$$

Ejercicio 5. Calcule las siguientes primitivas aplicando el método de integración por partes.

$$(a) \quad \int x \operatorname{sen} x dx$$

$$(d) \quad \int x \ln x dx$$

$$(b) \quad \int (x^2 - 2)e^{-x} dx$$

$$(e) \quad \int x^2(x + 4)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$(c) \quad \int x^3 \cos x dx$$

$$(f) \quad \int (t^2 + t)(t + 1)^{-5} dt$$

(g) $\int \ln x \, dx$

(i) $\int e^x \cos x \, dx$

(h) $\int \arccos x \, dx$

(j) $\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x) \, dx$

Ejercicio 6. Mediante la descomposición de funciones racionales en fracciones simples, calcule las primitivas de cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \frac{3x - 2}{(x + 2)(x + 3)}$

(f) $f(x) = (x^2 - 1)^{-2}$

(b) $f(x) = 4(x - 2)^{-1}(x - 1)^{-1}$

(g) $f(x) = \frac{7x - 6}{3x^3 + 6x^2 + 3x}$

(c) $f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 - 4}$

(h) $f(x) = \frac{8x^3 + 7}{8(x + 1)(x + \frac{1}{2})^2}$

(d) $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$

(i) $f(x) = \frac{2(2x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)}$

(e) $f(x) = \frac{x}{(x + 1)(x - 2)(x + 3)}$

(j) $f(x) = \frac{3}{(x^2 + 2x + 3)(x + 2)}$

Ejercicio 7. Calcule las siguientes primitivas:

(a) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3 + 1}} \, dx$

(k) $\int x^5 \sqrt[5]{5 - x^2} \, dx$

(b) $\int x^{\frac{1}{2}} \ln x \, dx$

(l) $\int \operatorname{sen}^5\left(\frac{x}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{6}\right) \, dx$

(c) $\int \frac{\ln^3 x}{x} \, dx$

(m) $\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x}}{1 + 4x^2} \, dx$

(d) $\int x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \, dx$

(n) $\int \ln(x^2 + 1) \, dx$

(e) $\int (1 + \cos 2x)^{-2} \operatorname{sen} x \, dx$

(ñ) $\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{1 - e^{2x}} \, dx$

(f) $\int \frac{(\operatorname{sen} x - 2)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2} \, dx$

(o) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

(g) $\int \frac{xe^{3x^2}}{4 + e^{3x^2}} \, dx$

(p) $\int \frac{\ln x + 1}{x(\ln^2 x - 3 \ln x)} \, dx$

(h) $\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x) \, dx$

(q) $\int (x^3 + x)\cos(x^2 + 1) \, dx$

(i) $\int x\left(\operatorname{sen} x + \frac{x}{2} \cos x\right) \sqrt{x^2 \operatorname{sen} x} \, dx$

(r) $\int \sqrt{e^x + 1} \, dx$

(j) $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}} \, dx$

(s) $\int \frac{\cos^3 x}{1 + \cos^2 x} \, dx$

(t) $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$

Ejercicio 8.

(a) Hallar $f(x)$ tal que $f'(x) = 2(\operatorname{sen} x)^3 \cos x$ y $f(0) = 3$.

(b) Hallar $g(x)$ tal que $g'(x) = t \operatorname{sen}(5t)$ y $g(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(c) Hallar $h(x)$ tal que $h'(x) = \frac{x+6}{x^2-4}$ y $h(3) = 0$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable. Sabemos que f tiene un punto crítico en $x = 2$, que el gráfico de f pasa por el punto $(2;3)$ y que $f'(x) = -x + a$ para cierto $a \in \mathbb{R}$. Hallar $f(x)$.

Ejercicio 10. Aplicando la Regla de Barrow, calcular

(a) $\int_0^1 e^t dt$

(c) $\int_0^x \cos t dt$

(e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sen} t dt$

(b) $\int_1^2 \frac{1}{t} dt$

(d) $\int_1^x t^r dt$ (donde $x > 1$)

Ejercicio 11. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + a$. Sabemos que $x - 2$ es un factor de f .

(a) Determine a y factorice $f(x)$ totalmente.

(b) Haga un gráfico aproximado de $f(x)$.

(c) Calcule $\int_{-1}^2 f(x) dx$; $\int_2^{2,5} f(x) dx$; $\int_{-1}^{2,5} f(x) dx$.

Ejercicio 12. Aplicando los métodos de sustitución e integración por partes calcule las siguientes integrales definidas.

(a) $\int_{-1}^{\sqrt{2}} x(x^2 + 1)^{-3} dx$

(e) $\int_1^4 x^{-1} \cos(\ln x) dx$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x)^{-2} \operatorname{sen}(2x) dx$

(f) $\int_0^1 e^x (4 + 3e^x) dx$

(c) $\int_3^7 x \ln x dx$

(g) $\int_3^9 x \sqrt{x+1} dx$

(d) $\int_0^2 (1+x^2)(x-1)^{\frac{2}{3}} dx$

(h) $\int_0^1 e^x (e^{2x} + e^x + 1)^{-1} dx$

Ejercicio 13. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones.

$$(a) f_1(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$$

$$(e) f_5(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t} dt$$

$$(b) f_2(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$$

$$(f) f_6(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{2+t^2} dt$$

$$(c) f_3(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$$

$$(g) f_7(x) = \int_x^{x^3} \cos(t^2) dt$$

$$(d) f_4(x) = \int_2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t dt \quad \text{con } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(h) f_8(x) = \int_{\cos x}^{e^x} t^2 dt$$

Ejercicio 14. Determine los máximos y mínimos locales de la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_0^x e^{t^2} t^2 (t-1)(t-4) dt$$

$$(a) \text{ Calcule } \int_0^6 f(t) dt.$$

$$(b) \text{ Verifique que } f(3) = 0.$$

$$(c) \text{ Verifique que } f(x) > 0 \text{ en } [0;3), \text{ y } f(x) < 0 \text{ en } (3;6].$$

$$(d) \text{ Demuestre que } \int_0^6 |f(t)| dt = 2 \int_0^3 f(t) dt = 6.$$

Ejercicio 15. Calcule el área de la región limitada por:

$$(a) \text{ La parábola } y = \frac{1}{2}x^2, \text{ el eje } x \text{ y las rectas } x = 1, x = 2.$$

$$(b) \text{ La recta } y = -x + 5, \text{ el eje } x \text{ y las rectas } x = 6, x = 9.$$

Ejercicio 16. En cada caso, determine el área de la región encerrada por la curva, el eje x y las rectas verticales indicadas.

$$(a) y = x^3, x = 2, x = 5.$$

$$(b) y = x^2 - x + 1, x = 0, x = 1.$$

$$(c) y = x + \frac{1}{x}, x = 1, x = 2.$$

Ejercicio 17. Determine $a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que el área de la región encerrada entre el eje x , el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = a$ sea $\frac{5}{2}$.

Ejercicio 18. Calcule el área de la región acotada limitada por las curvas dadas en cada caso

$$(a) y = 3x^2 - 7x, y = x^2 + x - 6$$

- (b) $y^2 = x$, $x - y = 2$
- (c) $y = x^{1/3}$, $x = 0$, $y = 1$
- (d) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $x = -1$
- (e) $y = x^{1/2}$, $y = x - 2$, $x = 0$
- (f) $y = x^2 - 1$, $y = -x$
- (g) $y = x^3 - x$, $y = x$
- (h) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a dicha curva en $x = 1$.
- (i) $3y^2 - 3y = x - 1$, $2y^2 - 2y = x - 3$

Ejercicio 19. Sean $p(t)$ y $v(t)$ la posición y la velocidad instantánea de una partícula de trayectoria rectilínea, cuya aceleración instantánea es $a(t) = 4t - 16$ y tal que la posición inicial era $p(0) = 0$, y la velocidad inicial $v(0) = 30$.

- (a) Determinar $v(t)$ y verificar que la velocidad es nula para $t = 3$.
- (b) Obtener la expresión de $p(t)$ y calcular la posición para $t = 3$.

Ejercicio 20. Un móvil se desplaza por un camino recto y su aceleración en el instante t está dada por $a(t) = t(t - 100)$. En el instante inicial el móvil estaba en la posición s_0 , y su velocidad inicial era 25. ¿Cuál es la posición $s(t)$ para $0 < t < 100$?

Ejercicio 21. Una nave espacial está en reposo en el instante $t = 0$. Mediante mediciones en el interior de la nave se comprueba que recibe una aceleración instantánea $a(t) = t^{1/2} + 1$ cuando $t > 0$, donde el tiempo se mide en segundos y la aceleración en m/s^2 .

- (a) ¿Qué velocidad lleva la nave cuando pasaron 64 segundos desde el arranque?
- (b) ¿A qué distancia del punto de partida está en ese instante?

Ejercicio 22. El corredor H_1 , que es especialista en los 100 metros llanos desarrolla una velocidad instantánea $v_1(t) = 10(1 - e^{-3t})$ donde la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos. Un segundo corredor H_2 tiene una velocidad instantánea $v_2(t) = \frac{21}{2}(1 - e^{-t})$.

- (a) ¿Qué distancia recorre cada corredor en los primeros 10 segundos de carrera?
- (b) ¿Y en los primeros 20 segundos?
- (c) ¿Cuál de los corredores ganaría una carrera de 100 metros?
- (d) ¿Y una carrera de 200 metros?