Análisis Complejo

Práctica N°7.

Sucesiones de funciones holomorfas

Notación: Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

- $\mathcal{O}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$,
- $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ si $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{O}(\Omega)$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y para todo compacto $K \subset \Omega$, $f_n \to f$ uniformemente en K.
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ es *acotado* si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe M_K tal que $\|f\|_K \leq M_K$ para toda $f \in \mathcal{A}$.

1. Sea $P_n(z) = 1 + \dfrac{z}{2!} + \cdots + \dfrac{z^n}{(n+1)!}$. Demostrar que dado $R > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale que P_n no tiene ceros reales de módulo menor que R.

2. (a) Probar que la función *gamma*, definida por
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$
es holomorfa en $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

   (b) Probar que
$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \log(t) dt.$$

   (c) Probar que $\Gamma(1) = 1$ y que para todo $z \in \{\mathrm{Re}(z) > 0\}, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Deducir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. (a) Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Si $f_n \to f$ uniformemente en K y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in K$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ f_n no se anula en K y además $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ uniformemente en K.

   (b) Si además $g_n \to g$ uniformemente en K, probar que $f_n g_n \to fg$ uniformemente en K.

   (c) Sea γ una curva simple cerrada incluída en Ω y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que f no se anula sobre γ. Si $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, la cantidad de ceros de f_n en $\mathrm{Int}(\gamma)$ es igual a la cantidad de ceros de f en $\mathrm{Int}(\gamma)$.

4. Sea $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ con $f \not\equiv 0$. Si existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$, probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ existe $a_n \in \Omega$ de modo que $a_n \to a$ y $f_n(a_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$.

5. Sea $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$ y $(z_n)_{n\geq 1} \subset \Omega$ tal que $z_n \to z \in \Omega$. Probar que $f_n(z_n) \to f(z)$.

6. Probar que $\left\{\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ converge a e^z en $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

7. Prober que si $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$, entonces $\{f_n\}$ es un conjunto acotado en $\mathcal{O}(\Omega)$.

8. Probar que si $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$, entonces $e^{f_n} \to e^f$ en $\mathcal{O}(\Omega)$.

9. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto acotado en $\mathcal{O}(\Omega)$ y sea $\mathcal{A}' = \{f' \mid f \in \mathcal{A}\}$. Probar que $\mathcal{A}'$ es acotado.

Sucesiones de funciones meromorfas

10. (a) Demostrar que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\right)^2.$$
(Sugerencia: observar que ambos miembros de la igualdad son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, periódicas de período 1, con polos de orden 2 en los todos los enteros n, en los que la parte singular es $\frac{1}{(z-n)^2}$. Notar que, por lo tanto, la diferencia entre ambos miembros es una función con únicamente singularidades evitables. Probar que esta función es acotada.)

    (b) Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

11. Probar que
$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2} = \pi\operatorname{cotg}(\pi z).$$

12. Sea $f(z)$ una función meromorfa con polos simples en los puntos $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Sea A_n el residuo de $f(z)$ en cada polo a_n.

    (a) Probar que existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$ y f no tiene singularidades sobre $\{|z| = r_n\}$.

    (b) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{\{|z|=r_n\}} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \to 0$, probar que
$$f(z) = f(0) + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$
(Sugerencia: calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z|=r_n\}} \frac{f(w)}{w(w-z)}dw$.)