## Análisis Complejo - Segundo Parcial - 12/12/2009 (soluciones)

---

1. Los polos de $Q(z) = \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}$ en $\{Im(z) > 0\}$ son $z_1 = \sqrt{2}i$ y $z_2 = \sqrt{3}i$. Además, $Res(Q, z_1) = \frac{i}{\sqrt{2}}$ y $Res(Q, z_2) = \frac{-3i}{2\sqrt{3}}$. Eligiendo un contorno adecuado para integra, se prueba que $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)dx = 2\pi i(Res(Q, z_1) + Res(Q, z_2)) = \pi(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

---

2. Si fuera esencial, por Cassoratti-Weierstrass $f(A)$ sería denso, y por lo tanto, $f(A)$ no puede estar contenido en $\{Re(z) > 0\}$.

   Si fuera un polo de orden $n \geq 1$, entonces $f(z) = z^{-n}h(z)$, con $h$ holomorfa en $D(0, 1)$ y $h(0) = c \neq 0$. Entonces si $0 > t \to 0$, $\frac{h((-c)^{1/n}t)}{c} \to 1$. Por lo tanto, si $t$ suficientemente chico, $|\frac{h((-c)^{1/n}t)}{c} - 1| < 1/2$; lo que implica que $Re\big(\frac{h((-c)^{1/n}t)}{c}\big) > 0$. Luego, $Re(f((-c)^{1/n}t)) = Re\Big(\frac{h((-c)^{1/n}t)}{-t^n c}\Big) < 0$.

---

3. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$ una sucesión acotada. Supongamos que para cada $t \in \mathbb{Z}$, la sucesión $\{f_n(e^t)\}$ converge en $\mathbb{C}$. Probar que $\{f_n\}$ converge en $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

   Por el teorema de Montel existe una subsucesión que converge en $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ a $f$. Qvq $f_n \to f$ en $\mathcal{O}(\mathbb{C})$. Si no pasara esto, existitría $\varepsilon > 0$, una subsucesin $\{f_{n_k}\}$ y un compacto $K$ tal que $\|f_{n_k} - f\|_K > \varepsilon$ para todo $n_k$. Como $\{f_{n_k}\}$ es también acotada, tiene una subsucesión (que volvemos a llamar $\{f_{n_k}\}$) convergente a una función holomorfa $h$.

   Pero como $f_n(e^t)$ converge para todo $t \in \mathbb{Z}$, se concluye que $f$ y $h$ coinciden en un conjunto que tiene un punto de acumulación (por qué?). Luego $f = h$, lo que contradice que $\|f_{n_k} - f\|_K > \varepsilon$ para todo $n_k$.

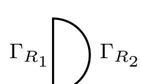
---

4. $(i)$ Sabemos que los automorfismos de $\{Im(z) > 0\}$ son las homografías con determinante positivo. Por lo tanto, $Aut(\{Im(z) > 0,\, Re(z) > 0\}) = \{\sqrt{z} \circ \varphi \circ z^2 : \varphi \in Aut(\{Im(z) > 0\})\} = \{\sqrt{\frac{az^2+b}{cz^2+d}} : ad - bc > 0\}$.

   $(ii)$ Primero aplicamos $\sqrt{z}$ a $B(0, 1) \setminus [0, 1)$ y obtenemos el abierto que es el la mitad superior del disco. Ahora usando homografias queremos llegar de este abierto al primer cuadrante. O sea queremos que: la circunferencia unitaria caiga en $\mathbb{R}$, que $\mathbb{R}$ caiga en el eje imaginario, y que los de parte imaginaria positiva caigan en el primer cuadrante. Una homografía que hace eso es $h(z) = \frac{-iz+i}{2z+2}$, ya que $h(1) = 0$, $h(-1) = \infty$, $h(0) = \frac{i}{2}$ y $h(i) = \frac{1}{2}$. $\sqrt{h}$ es el biholomorfismo que nos sirve.

   $(iii)$ $Aut(B(0, 1) \setminus [0, 1)) = \{\sqrt{h}^{-1} \circ \psi \circ \sqrt{h} : \psi \in Aut(\{Im(z) > 0,\, Re(z) > 0\})\}$.

---

5. La cantidad de raíces de $p$ en $\{Re(z) > 0\}$ coincide con la cantidad de raíces de $p$ en un semicírculo de radio $R$ como en la sugerencia, si $R$ es suficientemente grande. Denotemos por $\Gamma_R$ al contorno de este semicírculo y $\Gamma_{R_1}$ y $\Gamma_{R_2}$ a: 


   Sea $g(z) = z^4 + 8i$. Entonces en $\Gamma_{R_2}$, $|p - g| = 2R^3 < R^4 - 8 \leq |g|$ si $R$ es suficientemente grande. En $\Gamma_{R_1}$, $z = it$, $|p(it) - g(it)| = 2|t|^3 < |t^4 + 8i| = |g(it)|$ (por qué?). Por el Teorema de Rouché, $p$ y $g$ tienen la misma cantidad de raíces (contadas con multiplicidad) dentro de $\Gamma_R$. Como $g$ tiene 2 raíces en el interior de $\Gamma_R$, $P$ también. Por lo tanto, $P$ tiene 2 raíces en $\{Re(z) > 0\}$.

---