Álgebra 1

Práctica 5 - Enteros (segunda parte)

1. i) Hallar el desarrollo en base 2 de 1365, 2800, 3.2^{13} y $13.2^n + 5.2^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
ii) Hallar el desarrollo en base 7 de 8575
iii) Hallar el desarrollo en base 16 de 2800

2. i) Sea a un entero. Probar que si el desarrollo en base 10 de a termina en n ceros entonces el desarrollo en base 5 de a termina en por lo menos n ceros.
ii) Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo en base 16 del número $20!$

3. Determinar, cuando existan, todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

i) $5a + 8b = 3$
ii) $7a + 11b = 10$
iii) $24a + 14b = 7$
iv) $20a + 16b = 36$
v) $39a - 24b = 6$
vi) $1555a - 300b = 11$

4. Si se sabe que cada unidad de un cierto producto A cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto B cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar con 135 pesos?

5. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia

i) $17X \equiv 3 \ (11)$
ii) $56X \equiv 28 \ (35)$
iii) $56X \equiv 2 \ (884)$
iv) $33X \equiv 27 \ (45)$

6. Hallar el resto de la división de un entero a por 18, sabiendo que el resto de la división de $7a$ por 18 es 5.

7. i) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(7a + 1 : 5a + 4) \neq 1$
ii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) \neq 1$

8. Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente:

$$\begin{cases} a \equiv 0 & (8) \\ a \equiv 2 & (5) \\ a \equiv 1 & (21) \end{cases} \qquad \begin{cases} a \equiv 3 & (10) \\ a \equiv 2 & (7) \\ a \equiv 5 & (9) \end{cases}$$

9. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente:

$$\begin{cases} a \equiv 1 & (6) \\ a \equiv 2 & (20) \\ a \equiv 3 & (9) \end{cases} \qquad \begin{cases} a \equiv 1 & (12) \\ a \equiv 7 & (10) \\ a \equiv 4 & (9) \end{cases}$$

y, en caso afirmativo, hallarlos todos.

10. Sabiendo que los restos de la división de un entero a por 3, 5 y 8 son 2, 3 y 5 respectivamente, hallar el resto de la división de a por 120.

11. i) ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 2 y cuyo resto en la división por 18 sea 8?
ii) ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 13 y cuyo resto en la división por 35 sea 22?

12. Hallar el menor entero positivo a que satisfaga simultáneamente las condiciones siguientes:

- el resto de la división de a por 21 es 13.
- el resto de la división de $6a$ por 15 es 9.

13. Hallar un entero a entre 60 y 90 tal que el resto de la división de $2a$ por 3 sea 1 y el resto de la división de $7a$ por 10 sea 8.

14. Hallar el resto de la división de a por p en los casos

i) $a = 33^{1427}$, $p = 5$

ii) $a = 71^{22283}$, $p = 11$

iii) $a = 5.7^{2451} + 3.65^{2345} - 23.8^{138}$, $p = 13$

15. Hallar todos los primos positivos p tales que $p \mid 2^p + 5$

16. i) Resolver la ecuación de congruencia $2^{13}X \equiv 5\ (11)$

ii) Resolver la ecuación de congruencia $2^{94}X \equiv 7\ (97)$

17. Sean p y q dos primos positivos distintos. Probar que si a es un entero coprimo con pq entonces $p.q \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$

18. Probar que si a es un entero coprimo con 561 entonces $561 \mid a^{560} - 1$

19. Probar que, para todo $a \in \mathbb{Z}$,

i) $728 \mid a^{27} - a^3$

ii) $880 \mid a^{64} - a^4$

iii) $\dfrac{2a^7}{35} + \dfrac{a}{7} - \dfrac{a^3}{5} \in \mathbb{Z}$

20. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $7^n \equiv 5\ (13)$

21. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{236} \equiv 6\ (19)$

22. i) Probar que $(2^n + 7^{n+1} : 2^{n+1} + 7^n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(3^{n+1} + 4^n : 4^{n+1} - 3^n) \neq 1$

23. Sea p un primo, $p > 2$ y sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p \nmid a$. Probar que $p^n \mid a^{(p-1)p^{n-1}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comparar con el ejercicio 17. i) de la práctica 4.

Sugerencia: En el paso inductivo notar que $a^{(p-1)p^n} - 1 = (a^{(p-1)p^{n-1}})^p - 1^p$ y usar el ejercicio 8 de la práctica 2

24. i) Hallar el resto de la división de 3^{3603} por 5^3

ii) Hallar el resto de la división de 7^{542} por 81

25. Calcular el resto de la división de $\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$ por 56

26. i) Hallar el resto de la división de $3.7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$ por 70

ii) Hallar el resto de la división de 3^{385} por 400

iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $539 \mid 3^{253}a + 5^{44}$

27. Hallar el resto de la división de 2^{2^n} por 13 para cada $n \in \mathbb{N}$

28. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \equiv 53\ (77)$

29. Hallar todos los divisores positivos de 25^{70} que sean congruentes a 2 módulo 9 y a 3 módulo 11.

30.
i) Probar que $(3a^6 - 3 : 5a^6 + 2) = 1$ ó 7. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales vale 7
ii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^7 - 3 : 5a^7 + 2) = 7$
iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(11a^6 + 1 : 90) = 5$
iv) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(9a^{25} + 10 : 280) = 35$. Hallar el resto de la división de a por 70
v) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^{98} - 5a^{50} + 4 : 140a) = 14$
vi) Hallar todos los enteros positivos a tales que $(4a^{62} - a : 11a) \neq a$
vii) Para cada entero a hallar $(a^{18} + 413 : 3^2.5.7^3)$

31. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(5^{n+1} - 9^n \ : \ 9^{n+1} + 39\, a\, 5^n) = 22$. Hallar el resto de la división de a por 44.

32. Escribir las tablas de suma y producto en $\mathbb{Z}_n$ para $n = 2, 3, 4$ y 5.

33. Se dice que un elemento $a \in \mathbb{Z}_n$ es un *cuadrado* si existe $b \in \mathbb{Z}_n$ tal que $a = b^2$ en $\mathbb{Z}_n$

i) Calcular los cuadrados de $\mathbb{Z}_n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11$ y 13
ii) Probar que si a y b son cuadrados en $\mathbb{Z}_n$, ab es un cuadrado.
iii) Probar que si a es un elemento inversible de $\mathbb{Z}_n$ que es un cuadrado, a^{-1} es un cuadrado.
iv) Sea p primo positivo. Probar que, en $\mathbb{Z}_p$, si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$ ó $a = -b$
v) Sea p primo positivo impar. Probar que en $\mathbb{Z}_p$ hay exactamente $\frac{(p-1)}{2}$ cuadrados no nulos.
vi) Sea p primo positivo impar. Probar que, en $\mathbb{Z}_{2p}$, si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$ ó $a = -b$
vii) Probar que si n es un natural compuesto e impar, existen a y b en $\mathbb{Z}_n$ con $a^2 = b^2$ y $a \neq \pm b$

34. Sea p primo positivo.

i) Probar que si $k < p$ es un natural, p divide a $\binom{p}{k}$. Dar algunos contraejemplos si p no es primo.
ii) Deducir del ítem anterior que, en $\mathbb{Z}_p$, vale $(a + b)^p = a^p + b^p$
iii) ¿Sigue valiendo la propiedad del ítem ii) en $\mathbb{Z}_n$ si n no es primo?

35. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determinar si tiene soluciones y, en caso afirmativo, hallarlas todas:

i) $5 \cdot x = 4$ en $\mathbb{Z}_{14}$.
ii) $6 \cdot x = 10$ en $\mathbb{Z}_{21}$.
iii) $20 \cdot x = 12$ en $\mathbb{Z}_{24}$.