Topología 2008

Práctica 8 - Revestimientos

1. Probar que $p : \mathbb{R}_{>0} \to S^1$ definida por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ es un homeomorfismo local pero no es un revestimiento.

2. Probar que si $p : E \to B$ es un revestimiento, entonces p es abierta.

3. Probar que si $p : E \to B$ y $p' : E' \to B'$ son revestimientos, entonces $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ también lo es.

4. Probar que la función $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^n$ es un revestimiento.

5. Sea G un grupo topológico y H un subgrupo discreto. Probar que la proyección $p : G \to G/H$ es un revestimiento.

6. Sean $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ revestimientos. Probar que si $q^{-1}(z)$ es finito para cada $z \in Z$, entonces $qp : X \to Z$ es un revestimiento. Mostrar con un ejemplo que la hipótesis $q^{-1}(z)$ finito para cada $z \in Z$ es necesaria.

7. Sea B un espacio conexo y localmente conexo, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Probar que si C es una componente de E, entonces $p|_C : C \to B$ es un revestimiento.

8.
   a) Sean $X \to B$ y $Y \to B$ revestimientos. Probar que el producto fibrado $X \times_B Y \to B$ es un revestimiento.

   b) Sean $(X \to B) = (S^1 \xrightarrow{f} S^1)$ y $(Y \to B) = (S^1 \xrightarrow{g} S^1)$ donde $f(z) = z^m$ y $g(z) = z^n$. Hallar las componentes conexas de $X \times_B Y \to B$.

9. Sean B localmente conexo, $p : X \to B$ un revestimiento y sea $Y \subset X$ tal que $p|_Y : Y \to B$ también resulta revestimiento. Probar que $p|_{X \setminus Y} : X \setminus Y \to B$ es también un revestimiento. Mostrar con un ejemplo que la hipótesis B localmente conexo es necesaria.

10. Sea $p_\alpha : X_\alpha \to B$ un revestimiento para cada $\alpha \in I$, y sea $q : Z \to B$,

$$Z = \{(x_\alpha)_{\alpha \in I} : p_\alpha(x_\alpha) = p_\beta(x_\beta)\, \forall \alpha, \beta \in I\}.$$

   a) Probar que si Y es finito, entonces q es un revestimiento.

   b) Dar un contraejemplo con I infinito y p_α conexo para todo α.

   c) Probar que si los p_α son todos iguales, entonces q es un revestimiento.

11. Sea $p : E \to B$ un revestimiento. Sean α, β caminos en B con $\alpha(1) = \beta(0)$. Sean $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ levantados de α, β tales que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$. Probar que $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ es un levantado de $\alpha * \beta$.

12. Probar que $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(a, b) \mapsto (b \cos 2\pi a, b \sin 2\pi a)$ es un revestimiento. Hallar levantados de los siguientes caminos:

    I) $f(t) = (2 - t, 0)$
    II) $g(t) = ((1 + t) \cos(2\pi t), (1 + t) \sin(2\pi t))$
    III) $h(t) = f(t) * g(t)$

    Dibujar estos caminos y sus levantados.

13. Sea $p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ el revestimiento usual del toro. Sea ω el camino

$$w(t) = ((\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t), (\cos 4\pi t, \operatorname{sen} 4\pi t)).$$

    Dibujar w en el toro inmerso en $\mathbb{R}^3$, y calcular y dibujar un levantado $\tilde{\omega}$.

14. Sea $p : E \to B$ un revestimiento, E arcoconexo, y sea $p(e_0) = b_0$.

    a) Probar que $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es inyectivo.
    b) Probar que hay una biyección $\phi : \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, e_0)) \to p^{-1}(b_0)$.
    c) Concluir que si $\pi_1(B, b_0) = \mathbb{Z}$, entonces o bien $\pi_1(E, e_0) = \mathbb{Z}$ o bien $\pi_1(E, e_0) = 0$.
    d) Concluir que si $\pi_1(B, b_0)$ es finito, entonces $\pi_1(E, e_0)$ también y además $|\pi_1(B, b_0)| = |\pi_1(E, e_0)|.\#p^{-1}(b_0)$.
    e) Concluir que si B es simplemente conexo, entonces p es un homeomorfismo.

15. Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios.

    a) $X = S^1 \times [0, 1]$ (un cilindro).
    b) $X = S^1 \times \mathbb{R}$ (un cilindro infinito).
    c) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
    d) $X = M$, la banda de Möbius.
    e) $X = T = S^1 \times S^1$, el toro usual. Dibujar los generadores en una inmersión de T en $\mathbb{R}^3$.
    f) $X = \mathbb{R}^3 \setminus L$, donde L es una variedad lineal de dimensión 1 o 2 (o sea, una recto o un plano).

16. Probar que $f : X \to S^1$ puede levantarse a una función continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $p\tilde{f} = f$ (donde $p : \mathbb{R} \to S^1$ es la función $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$) si y sólo si f es homotópicamente nula.

17. Probar que no existe una retracción $r : D^2 \to S^1$.

18. Sea $b_0 = (1,0) \in S^1$, y sea γ un generador de $\pi_1(S^1, b_0)$. Si x_0 es cualquier punto de S^1, escojamos un camino α en S^1 de b_0 a x_0, y definamos $\gamma(x_0) = \widehat{\alpha}(\gamma)$. Entonces $\gamma(x_0)$ genera $\pi_1(S^1, x_0)$. El elemento $\gamma(x_0)$ es independiente de la elección del camino α (por qué?).

    Sean $h : S^1 \to S^1$, sea $x_0 \in S^1$ y sea $h(x_0) = x_1$. El morfismo $h_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_1)$ satisface

    $$h_*(\gamma(x_0)) = d.\gamma(x_1)$$

    para algún $d \in \mathbb{Z}$. El entero d se llama el *grado* de h y de senota por $\deg h$.

    (a) Demostrar que d es independiente de la elección de x_0 y de γ.

    (b) Probar que si $h, k : S^1 \to S^1$ son homotópicas entonces tienen el mismo grado.

    (c) Demostrar que $\deg(h \circ k) = \deg h . \deg k$.

    (d) Calcular los grados de una aplicación constante, de la identidad, de la reflexión $\rho(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ y de la aplicación $h(z) = z^n$.

    (e) Probar que si $h, k : S^1 \to S^1$ tienen el mismo grado entonces son homotópicas.