

Topología 2008

Práctica 6 - Espacios de funciones

- Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico.
 - Probar que en Y^X se tienen las siguientes inclusiones de topologías:
(uniforme) \supset (convergencia compacta) \supset (convergencia puntual)
 - Probar que si X es compacto, entonces las dos primeras coinciden.
 - Probar que si X es discreto, entonces las dos últimas coinciden.
- Decidir con cuáles de las topologías del ejercicio anterior la sucesión $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1/nx$, tiene límite.
- Probar que (en general) el conjunto de funciones acotadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ no es cerrado en \mathbb{R}^X con la topología de convergencia compacta.
- Considere la sucesión de funciones $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k.$$

- Probar que f_n converge con la topología de convergencia compacta. Concluir que la función límite es continua.
 - Probar que f_n no converge con la topología uniforme.
- Sea (Y, d) un espacio métrico, y sea X un espacio. Dada $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ y dada una función continua positiva $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, sea

$$B(f, \delta) = \{g \mid d(f(x), g(x)) < \delta(x) \text{ for all } x \in X\}$$

- Probar que los conjuntos $B(f, \delta)$ forman una base para una topología en $\mathcal{C}(X, Y)$, a la que llamaremos *topología fina*.
- Probar que la topología fina es más fina que la uniforme.
- Probar que si X es compacto, entonces las topologías fina y uniforme coinciden.
- Probar que si X es discreto, entonces $\mathcal{C}(X, Y) = Y^X$ y las topologías fina y caja coinciden.

6. Probar que si Y es Hausdorff (resp. regular), entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ es Hausdorff (resp. regular) con la topología compacto-abierto.
7. Sea A un subespacio de X . Probar que la restricción $r : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(A, Y)$ es continua si se considera ambos espacios con la topología compacto-abierto.
8. Sea Y localmente compacto y Hausdorff. Probar que la composición

$$\circ : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

es continua con la topología compacto-abierto.

9. Sea \mathcal{T} una topología para $\mathcal{C}(X, Y)$. Probar que si la evaluación

$$e : \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$$

es continua, entonces \mathcal{T} es más fina que la compacto-abierto.

10. Probar que si $p : E \rightarrow B$ es cociente y X es localmente compacto y Hausdorff, entonces $p \times id : E \times X \rightarrow B \times X$ es cociente.

11. Sea X compacto y Hausdorff, y sea $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ el anillo de funciones reales con las operaciones punto a punto. Este ejercicio muestra que el anillo $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ caracteriza completamente al espacio X . Se define $H(X)$ como el conjunto de todos los morfismos de anillos $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, equipado con la topología de convergencia puntual.

- a) Probar que si $I \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ es un ideal maximal, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $I = \{f \mid f(x_0) = 0\}$.
- b) Probar que si $\omega \in H(X)$, entonces ω es suryectivo y satisface $\omega(\lambda u) = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde u es la unidad de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
- c) Concluir que los únicos elementos de $H(X)$ son las evaluaciones ϵ_x , $x \in X$.
- d) Sea $\epsilon : X \rightarrow H(X)$ dado por $\epsilon(x) = \epsilon_x$. Probar que ϵ es un homeomorfismo.