Topología 2008

Práctica 5 - Separabilidad, Stone-Cech

1. Probar que si X es regular, entonces todo par de puntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.
2. Probar que si X es normal, entonces todo par de cerrados disjuntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.
3. Probar que un subespacio cerrado de un espacio normal es normal.
4. Probar que si X tiene la topología del orden, entonces X es regular.
5. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Probar que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff o regular o normal, entonces también lo es cada X_α.
6. Sea X un conjunto y sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ topologías en X tales que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o regular o normal) con una de estas topologías, decidir que puede deducirse de X con la otra topología.
7. Probar que si X es Hausdorff y localmente compacto, entonces es regular.
8. Sean $f, g : X \to Y$ continuas, Y Hausdorff. Probar que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
9. Probar que si X es normal, conexo y tiene más de un punto, entonces es no numerable.
10. Sea X regular con una base de abiertos numerable. Sea U un abierto de X.
    a) Probar que U es unión de numerables cerrados de X.
    b) Probar que existe $f : X \to I$ tal que $f(x) > 0$ si $x \in U$ y $f(x) = 0$ si $x \notin U$.
11. Sea X metrizable. Probar que son equivalentes:
    a) X es acotado para toda métrica que induzca la topología de X.
    b) Toda función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ es acotada.
    c) X es compacto.
12. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, decimos que Y es retracto de Z si existe una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.
    a) Probar que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.
    b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de dos elementos. Probar que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.
    c) Probar que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. ¿Es S^1 un retracto de $\mathbb{R}^2$?

13. Probar que si Y es normal con base $\mathcal{B}$, entonces Y es subespacio de $[0,1]^J$ con $J \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

14. Probar que si $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separan puntos de cerrados, entonces es inicial.

15. Probar que si X es Hausdorff y localmente compacto, entonces es completamente regular.

16. Probar que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es normal, pero es completamente regular.

17. Sea X completamente regular. Sean A, B cerrados disjuntos de X. Probar que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) =)\{1\}$.

---

18. Sea Y una compactificación arbitraria de X, y sea $\beta(X)$ la compactificación de Stone-Cech. Probar que existe una función cerrada y suryectiva $g : \beta(X) \to Y$ que se restringe a la identidad de X.

19. *a*) Probar que si $f : S_\Omega \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es eventualmente constante.
    b) Probar que la compactificación en un punto de S_Ω y la compactificación de Stone-Cech son equivalentes.
    c) Concluir que toda compactificación de S_Ω es equivalente a la compactificación en un punto.

20. Sea X completamente regular. Probar que X es conexo si y sólo si $\beta(X)$ es conexo.

21. Sea X discreto.
    a) Probar que si $A \subset X \subset \beta(X)$, entonces $\overline{A}$ y $\overline{X \setminus A}$ son disjuntos, donde las clausuras se toman en $\beta(X)$.
    b) Probar que si U es abierto en $\beta(X)$, entonces $\overline{U}$ es abierto en $\beta(X)$.
    c) Probar que $\beta(X)$ es totalmente disconexa.