Topología 2008

Práctica 4 - Compactos, grupos topológicos, espacios de adjunción

1. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X.

   a) Probar que si $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ y X es compacto para $\mathcal{T}'$, entonces X también es compacto para $\mathcal{T}$.

   b) Probar que si X es compacto y Hausdorff tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$, entonces ambas topologías coinciden o no son comparables.

2. Probar que si X tiene la topología del complemento finito, entonces es compacto.

3. Decidir si $[0,1]$ es compacto para

   a) la topología $\{U : [0,1] \setminus U \text{ es numerable o igual a } [0,1]\}$.

   b) la topología de subespacio de $\mathbb{R}_l$.

4. Sea X Hausdorff y sean $A, B \subset X$ compactos y disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

5. Sea $f : X \to Y$, con Y compacto y Hausdorff. Probar que f es continua si y sólo si el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$.

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

6. Sea $p : X \to Y$ suryectiva y cerrada. Probar que si Y es compacto y además $p^{-1}(y)$ es compacto para todo $y \in Y$, entonces X es compacto.

7. Considere el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & X \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

   Probar que si X y Z son compactos, e Y Hausdorff, entonces P es compacto.

8. Probar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

9. Probar que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.

10. Probar que si $\prod_{i \in I} X_i$ es localmente compacto, entonces cada X_i es localmente compacto y todos los X_i, salvo una cantidad finita, son compactos.

11. Probar que si X es localmente compacto y $f : X \to Y$ es abierta, entonces $f(X)$ también es localmente compacto.

12. Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$.
13. Usando la proyección estereográfica

$$\begin{aligned} p : S^n \setminus \{N\} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorafa a S^n.
14. Probar que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo de espacios de Hausdorf localmente compactos, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

---

15. Probar que los siguientes espacios son grupos topológicos.
    a) $(\mathbb{R}, +)$
    b) $(S^1, \cdot)$
    c) $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$
16. Probar que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.
17. Sea G un grupo topológico, sea e el neutro de G y sea U abierto que contiene a e. Probar que existe V abierto que contiene a e tal que $V \cdot V \subset U$ y $V^{-1} \subset U$.
18. Probar que si un grupo topológico G es T_0, entonces es T_2.
19. Probar que si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces la clausura de H es también un subgrupo. Probar que si H es invariante, entonces su clausura también.
20. De los grupos topológicos $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R})$, decidir cuáles son compactos y cúales son conexos.

Sea $i : A \to X$ un subespacio cerrado, y sea $f : A \to B$ continua. Denotamos $B \sqcup_f X$ al *espacio de adjunción* obtenido al calcular el siguiente push out.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "po"] & B \arrow[d, "\widetilde{i}"] \\ X \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & B \sqcup_f X \end{tikzcd}$$

21. Probar que $\widetilde{i} : B \to B \sqcup_f X$ es subespacio cerrado.

22. Probar que si $B' \subset B$ y $X' \subset X$ son subespacios tales que $A \subset X$ y $f(A) \subset B'$, entonces $B' \sqcup_f X'$ es un subespacio de $B \sqcup_f X$.

23. *a*) Probar que si $g : B \to C$ es continua, entonces se tiene un homeomorfismo $C \sqcup_g (B \sqcup_f X) \cong C \sqcup_{gf} X$.
    b) Probar que si $j : X \to Y$ es una inclusión cerrada, entonces se tiene un homeomorfismo $B \sqcup_f Y \cong (B \sqcup_f X) \sqcup_{\tilde{f}} Y$.

24. Supongamos que $A \neq \emptyset$. Probar que:
    a) si X y B son conexos, entonces $B \sqcup_f X$ también es conexo.
    b) si X y B son arco-conexos, entonces $B \sqcup_f X$ también es arco-conexo.
    c) si X y B son T_1, entonces $B \sqcup_f X$ también es T_1.
    d) si X y B son compactos, entonces $B \sqcup_f X$ también es compacto.

25. Probar que si $A \neq \emptyset$, A es conexo y $B \sqcup_f X$ es conexo, entonces B también es conexo.