Topología 2008

Práctica 3 - Conexión y arcoconexión

1. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X. Probar que si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ y X es conexo para $\mathcal{T}'$, entonces X también es conexo para $\mathcal{T}$.

2. Probar que si X es conexo y $A \subset X$ es un subconjunto propio no vacío, entonces $\partial A \neq \emptyset$. Probar que si X es disconexo entonces existe $B \subset X$ un subconjunto propio no vacío tal que $\partial B = \emptyset$.

3. *a*) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es conexo.

   b) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X tales que$A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Probar que $A \cup \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es conexo.

4. Probar que si X es discreto, entonces es totalmente disconexo. Hallar un espacio topológico totalmente disconexo que no sea discreto.

5. De los siguientes conjuntos, equipados con la topología del orden, decidir cuáles son conexos.

   a) $\mathbb{N} \times [0, 1)$.

   b) $[0, 1) \times \mathbb{N}$.

   c) $[0, 1) \times [0, 1]$.

   d) $[0, 1] \times [0, 1)$.

6. Probar que si $A \subset X$ es conexo, entonces $\bar{A}$ también. Mostrar con ejemplos que si $A \subset X$ es conexo, entonces no necesariamente lo son ∂A o A°.

7. Mostrar que entre los espacios $(0, 1), (0, 1]$ y $[0, 1]$ no hay dos homeomorfos. Concluir que la existencia de funciones subespacio $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ no implica que X e Y sean homeomorfos.

8. Sea $p : X \to Y$ una función cociente. Probar que si Y es conexo y además $p^{-1}(y)$ es conexo para todo $y \in Y$, entonces X es conexo.

9. Sea $f : S^1 \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que existe un punto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

10. Se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Probar que existe un punto fijo de f.

11. *a*) Mostrar que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es conexo si A es finito.

    b) Mostrar que $S^2 \setminus B$ es conexo si B es finito.

12. Probar que si X e Y son conexos, entonces $X \times Y$ es conexo. Probar que si X e Y son arco-conexos, entonces $X \times Y$ es arco-conexo.

13. Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ la curva *seno del topólogo*, equipada con la topología de subespacio.

$$T = \{(t, \sin(1/t)) : 0 < t \leq 1\}$$

Mostrar que T es arco-conexa, y que sin embargo $\bar{T} \subset \mathbb{R}^2$ no es arco-conexa.

14. Probar que si $A, B \subset X$ son subespacios arco-conexos y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es arco-conexo.

15. *a*) Probar que si X es localmente arco-conexo y $U \subset X$ es abierto, entonces U es localmente arco-conexo.

    b) Probar que si X es localmente arco-conexo y conexo, entonces es arco-conexo.

    c) Concluir que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces

$$U \text{ es conexo} \Leftrightarrow U \text{ es arco-conexo}$$

16. Calcular $\pi_0(\mathbb{R}_l)$.

17. Probar que el cuadrado ordenado $I \times I$ es localmente conexo pero no es localmente arco-conexo. Calcular $\pi_0(I \times I)$.

18. Dados x, y puntos de X, decimos que $x \sim y$ si no existe separación $X = A \cup B$ de X en dos conjuntos abiertos y disjuntos tales que $x \in A$ e $y \in B$.

    a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se llaman *cuasi-componentes* de X.

    b) Mostrar que cada componente de X está contenida en una cuasi-componente.

    c) Determinar las cuasi-componentes, las componentes conexas y las arco-conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (donde K denota el conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, y $-K$ denota el conjunto $\{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$).

    $A = (K \times [0, 1]) \cup (\{0\} \times [0, 1])$.

    $B = (A \setminus \{(0, 1/2)\})$.

    $C = B \cup ([0, 1] \times \{0\})$.

    $D = (K \times [0, 1]) \cup (-K \times [-1, 0]) \cup ([0, 1] \times -K) \cup ([-1, 0] \times K)$.