Topología 2008

Práctica 2 - Subespacios, productos y cocientes

1. Consideremos a $I = [-1, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos en I? ¿Cuáles son abiertos en $\mathbb{R}$?

   $A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$ $\quad$ $B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$ $\quad$ $C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\}$
   $D = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ $\quad$ $E = \{x : 0 < |x| < 1, 1/x \notin \mathbb{N}\}$ $\quad$ $F = \{x : |x| \leq 1\}$

2. Sea X un conjunto ordenado, equipado con la topología del orden, y sea $Y \subset X$.

   a) Probar que la topología del orden en Y no coincide en general con la topología de subespacio.

   b) Y se dice **convexo** si satisface $a, b \in Y \Rightarrow (a, b) \subset Y$. Probar que si Y es convexo, entonces estas dos topologías sí coinciden.

3. Probar que si $Z \subset A$ y A es subespacio de X, entonces la topología de Z como subespacio de A coincide con la topología de Z como subespacio de X.

4. Sean A un subespacio de X y B un subespacio de Y. Probar que la topología producto en $A \times B$ coincide con la topología de subespacio de $X \times Y$.

5. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son abiertas. Hallar ejemplos en los que no sean cerradas.

6. Sean X, Y, Z espacios topológicos, y sea $f : X \times Y \to Z$ una función. f se dice **continua en** x si $f(-, y) : X \to Z$ es continua para todo $y \in Y$. Analogamente, f se dice **continua en** y si $f(x, -) : Y \to Z$ es continua para todo $x \in X$.

   a) Probar que si f es continua, entonces es continua en cada variable.

   b) Hallar un ejemplo en el que f sea continua en cada variable y sin embargo no sea continua.

7. Probar que la topología del orden del diccionario en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}_d$ es la topología discreta en $\mathbb{R}$. Comparar con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

8. Sea $\mathbb{R}_l$ la topología cuya base de abiertos son los conjuntos de la forma $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sea L una recta en el plano. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$.

9. Sea $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden del diccionario en $I \times I$ y con la topología $I_d \times I$ donde I_d denota a I con la topología discreta.

10. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y, entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

11. a) Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $f : X \to X \times Y$ y $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = (x, y_0)$, $g(y) = (x_0, y)$ son subespacios.

    b) Sea X un espacio con una distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Probar que la topología inducida por la métrica es la mínima tal que d es continua.
    Sugerencia: si d es continua, también lo es $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$, $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$.

12. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y sea para cada $i \in I$ un subconjunto $A_i \subset X_i$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas si se toma en $X = \prod_{i \in I} X_i$ la topología producto. ¿Y si se toma la topología caja?

    a) Si cada A_i es cerrado en X_i entonces $\prod_{i \in I} A_i$ es cerrado en X.

    b) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

13. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red de puntos en el espacio topológico $X = \prod_{i \in I} X_i$. Probar que $x_\alpha \to x$ si y sólo si $\pi_i(x_\alpha) \to \pi_i(x)$ para todo $i \in I$. ¿Es cierto ésto si se toma en X la topología caja?

14. Comparar las topologías caja, producto y uniforme en $\mathbb{R}^\omega$. Hacer de nuevo los ejercicios 23, 24 y 25 de la práctica 1, tomando en $\mathbb{R}^\omega$ la topología caja y la producto. Comparar con lo obtenido para la topología uniforme.

15. Considerar la función h definida en el ejercicio 27 de la práctica 1. Probar que con sólo pedir que todos los a_i sean no nulos entonces h es un homeomorfismo si se considera en $\mathbb{R}^\omega$ la topología producto. ¿Y si en $\mathbb{R}^\omega$ consideramos la topología caja?

16. Sea $\{f_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ una familia inicial de funciones, y sea $f : X \to \prod X_i$ la función definida por
$$f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$
    Sea Z la imagen de f. Probar que $f : X \to Z$ es abierta.

17. Sea X un espacio topológico, y sea $S = \{0, 1\}$ el espacio de **Sierpinski**, cuyos abiertos son $\emptyset, \{1\}$ y S. Probar que $A \subset X$ es abierto si y sólo si la función característica de A, $\chi_A : X \to S$, es continua. Probar que la familia $\{\chi_U\}_{U \in \mathcal{T}_X}$ es una familia inicial para la topología de X.

18. Probar que si $f : X \to Y$ es final e inyectiva, entonces es inicial.

19. Probar que si $f : X \to Y$ es inicial y suryectiva, entonces es cociente.

20. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que si existe $g : Y \to X$ continua tal que $f \circ g = id_Y$, entonces f es un cociente.

21. Sea $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.

    a) Sea X el subespacio $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $g = \pi_1|_X$. Mostrar que g es cerrada pero no abierta.

b) Sea Y el subespacio $(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $h = \pi_1|_Y$. Mostrar que h no es abierta ni cerrada pero es cociente.

22. Caracterizar el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ en cada uno de los siguientes casos.

    a) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.

    b) $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$.

23. Sea Z el subespacio $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Z$ por la fórmula
$$\begin{cases} g((x,y)) &= (x,0) \text{ si } x \neq 0 \\ g((0,y)) &= (0,y) \end{cases}$$

    a) ¿Es g un cociente? ¿Es g continua?

    b) Hallar una base para la topología cociente en Z inducida por g.

24. Sea $X = \mathbb{C} \times \{0,1\}$ con la topología producto, $\{0,1\}$ con la topología discreta. Definimos en X la relación de equivalencia
$$(z,0) \sim (w,1) \Leftrightarrow z.w = 1, \quad (z,j) \sim_2 (w,j) \Leftrightarrow z = w$$
Se le da a $X/_\sim$ la topología cociente. Probar que $f : X \to S^2$ definida por
$$f(x+iy, j) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, 2y, 1-x^2-y^2) & \text{si } j = 0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}(2x, -2y, x^2+y^2-1) & \text{si } j = 1 \end{cases}$$
induce un homeomorfismo $\overline{f} : X/_\sim \to S^2$.
Sugerencia: Probar que $\overline{f}$ es biyectiva; probar la continuidad de la inversa en los abiertos $S^2 \setminus \{P_N\}$, $S^2 \setminus \{P_S\}$, donde P_N y P_S son los polos.

25. Sea G un grupo. Un G-**espacio** es un espacio topológico X junto con una acción $G \times X \to X$ tal que $x \mapsto g \cdot x$ es continua para todo g. Probar que los siguientes espacios topológicos son G-espacios.

    a) $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $n \cdot x = n + x$.

    b) $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción es $(n,m) \cdot (x,y) = (n+x, m+y)$.

    c) $X = S^n$, $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ y la acción es $\pm 1 \cdot x = \pm x$.

    d) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{-1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, $G = \mathbb{Z}$ y la acción es $m \cdot (x,y) = (m + x, (-1)^m y)$.

26. Si X es un G-espacio, podemos definir en X la relación de equivalencia
$$x \sim y \iff \exists\, g \in X \text{ tal que } y = g \cdot x.$$
El espacio de cociente resultante lo notamos con X/G, y consideramos en él la topología cociente. Probar que la proyección al cociente $p : X \to X/G$ es abierta, y que si G es finito, entonces p también es cerrada.

27. *a*) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ejercicio 25, a) es homeomorfo a S^1.

b) Probar que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (ejercicio 25, b) es homeomorfo al toro $S^1 \times S^1$.

c) El espacio cociente $S^n/\mathbb{Z}_2$ (ejercicio 25, c) se nota $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, y se llama el espacio proyectivo real de dimensión n.

d) Probar que el espacio cociente $X/\mathbb{Z}$ (ejercicio 25, d) es homeomorfo a la banda de Möbius. (Recordar que la banda de Möbius se define como el cociente de $[0,1]\times[0,1]$ por la relación que identifica $(0,y)$ con $(1,1-y)$, $y\in[0,1]$.)