Topología 2008

Práctica 10 - Clasificación de revestimientos

1. Una función es *homotópicamente nula* si es homotópica a una función constante.

   a) Probar que si $n > 1$, entonces toda función continua $S^n \to S^1$ es homotópicamente nula.

   b) Probar que toda función continua $P^2 \to S^1$ es homotópicamente nula.

   c) Exhibir una función $S^1 \times S^1 \to S^1$ que no sea homotópicamente nula.

2. Sea G un grupo topológico arcoconexo y localmente arcoconexo con elemento neutro e, y sea $p : \tilde{G} \to G$ un revestimiento con $\tilde{G}$ arcoconexo y $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Probar que la multiplicación $m : G \times G \to G$ y la función $I : G \to G$, $I(x) = x^{-1}$ se levantan a funciones $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ y $\tilde{I} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ que hacen a $\tilde{G}$ un grupo topológico con neutro $\tilde{e}$. Probar además que p es un morfismo.

3. Sean $q : X \to Y$ y $r : Y \to Z$ revestimientos. Probar que si Z admite revestimiento universal, entonces rq también es revestimiento.

4. Considere el isomorfismo $\pi_1(S^1 \times S^1, (b_0, b_0)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dado por las proyecciones $S^1 \times S^1 \to S^1$. Describir el revestimiento de $S^1 \times S^1$ correspondiente a los siguientes subgrupos.

   a) $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

   b) el subgrupo generado por $(1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

   c) $\{(2n, 2m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

5. Probar que si B admite un revestimiento universal, entonces B es semilocalmente simplemente conexo.

6. Sea $H = \cup_{n \geq 1} \partial B_{1/n}(1/n, 0) \subset \mathbb{R}^2$ el *arito Hawaiano.*

   a) Probar que H no es semilocalmente simplemente conexo.

   b) Sea $C(H)$ el *cono* de H, que consiste en el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por la unión de todos los segmentos que unen un punto de $H \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ con el punto $(0, 0, 1)$. Probar que $C(H)$ es semilocalmente simplemente conexo pero no localmente simplemente conexo.

7. Sean E, B arcoconexos y localmente arcoconexos, y sea $p : E \to B$ un revestimiento. Una *transformación deck* es un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $ph = p$.

   a) Sean $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$. Probar que existe una transformación deck h tal que $h(e_0) = e_1$ si y sólo si $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$. Probar que si h existe, entonces es única.

b) Si $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ es normal en $\pi_1(B, b_0)$, entonces $p : E \to B$ se dice un *revestimiento regular*. Probar que en ese caso, el grupo de transformaciones deck de E es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(B, b_0)/H$.

c) Concluir que si $p : E \to B$ es un revestimiento universal de B, entonces $\pi_1(B, b_0)$ es isomorfo al grupo de transformaciones deck.

8. Describir el grupo de transformaciones deck del revestimiento usual $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$.