Topología 2008

Práctica 1 - Espacios topológicos y funciones continuas

1. Sea X un conjunto. Un sistema de **filtros de entornos** consiste en dar para cada $x \in X$ una colección $\emptyset \neq \mathscr{F}_x \subset \mathscr{P}(X)$ satisfaciendo:

   E1: $x \in A$ para todo $A \in \mathscr{F}_x$

   E2: si $B \subset A$ y $B \in \mathscr{F}_x$, entonces $A \in \mathscr{F}_x$

   E3: si $A, B \in \mathscr{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}_x$

   E4: dado $A \in \mathscr{F}_x$, existe $B \subset A$ tal que $B \in \mathscr{F}_x$ y $B \in \mathscr{F}_y$ para cada $y \in B$

   a) Probar que un sistema de filtros de entornos induce una topología tomando

   $$\mathcal{T} = \{B \in \mathscr{P}(X) : B \in \mathscr{F}_x \text{ para todo } x \in B\} \cup \{\emptyset\}$$

   b) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, los conjuntos

   $$\mathscr{F}_x = \{A \in \mathscr{P}(X) : x \in U \subset A \text{ para algún } U \in \mathcal{T}\}$$

   verifican los axiomas E1-E4.

   c) Probar que las construcciones de *a*) y *b*) son mutuamente inversas.

2. Un **operador clausura** es una función $\overline{(\cdot)} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ tal que:

   C1: $\overline{\emptyset} = \emptyset$

   C2: $A \subset \overline{A}$ para todo $A \in \mathscr{P}(X)$

   C3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ para todo $A \in \mathscr{P}(X)$

   C4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ para todos $A, B \in \mathscr{P}(X)$

   a) Probar que un operador clausura $\overline{(\cdot)}$ induce una topología $\mathcal{T}$ en X tomando

   $$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X \setminus U} = X \setminus U$$

   b) Probar que una topología $\mathcal{T}$ en X induce un operador clausura tomando

   $$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F$$

   c) Probar que las construcciones de *a*) y *b*) son mutuamente inversas.

---

3. Probar que $\displaystyle\bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \ \forall\, x \in U \in \mathcal{T}\}$.

4. Probar las siguientes inclusiones y hallar ejemplos en los que sean estrictas.

   a) $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$

   b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

   c) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$

5. Considerar el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X.

   $A = \{(1/n, 0) : \ n \in \mathbb{N}\}$,
   $B = \{(1 - 1/n, 1/2) : \ n \in \mathbb{N}\}$,
   $C = \{(x, 0) : \ 0 < x < 1\}$,
   $D = \{(x, 1/2) : \ 0 < x < 1\}$,
   $E = \{(1/2, y) : \ 0 < y < 1\}$.

6. Considerar las siete topologías definidas en el ejercicio 11. Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las topologías.

---

7. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X. Probar que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?

8. Si $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X)$, la **topología generada** por $\mathcal{A}$ es la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{A}$. Probar que esta topología es la menos fina para la cual los elementos de $\mathcal{A}$ son abiertos. Calcular la topología en $X = \{a, b, c, d\}$ generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$.

9. Probar que si $\mathcal{B}$ es base de una topología en X, entonces los abiertos de la topología generada por $\mathcal{B}$ son uniones de elementos de $\mathcal{B}$. Probar que si $\mathcal{B}$ es una sub-base, entonces los abiertos de la topología generada por $\mathcal{B}$ son uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$.

10. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Sea $\mathcal{S} = \{S_x : \ x \in X\}$ y sea $\mathcal{R} = \{R_x : \ x \in X\}$, donde $R_x = \{y \in X : x < y\}$. Probar que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una sub-base para la topología del orden en X.

11. Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

    $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : \ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : \ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_3 = \{(a, b] : \ a < b\}$,
    $\mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : \ B \in \mathcal{B}_1\}$, donde $K = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$,
    $\mathcal{B}_5 = \{(a, +\infty) : \ a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathcal{B}_6 = \{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\}$,
    $\mathcal{B}_7 = \{B : \ \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}$.

a) Probar que cada $\mathcal{B}_i$ es una base para una topolología en $\mathbb{R}$.

b) Comparar las siete topologías entre si.

c) Probar que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una sub-base que genera la misma topología que $\mathcal{B}_1$.

---

12. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

R1: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

R2: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

R3: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

R4: Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k\in\Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \ \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x.

13. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que

$$\overline{A} = \{x \in X : \ \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset A, \text{ y } x_\alpha \to x\}$$

14. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathscr{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

---

15. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \to Y$ es equivalente a pedir que f sea continua

a) Para todo $x \in X$ y para todo $A \in \mathscr{F}_y$ $(y = f(x))$ existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $f(B) \subset A$

b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \to x$ se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$

c) Para todo $A \subset X$ se tiene $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

d) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

e) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

16. Sean X un espacio topológico y $E \subset X$. Sea $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E, esto es,
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$
Probar que χ_E es continua en x si y sólo si x no pertenece a la frontera de E.

17. *a*) Sean X, Y conjuntos ordenados, con la topología del orden. Probar que si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.
    b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.
    c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:
    $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
    Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo?

18. Sea Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.
    a) Probar que el conjunto $\{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.
    b) Sea $h : X \to Y$ la función $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$. Probar que h es continua.

19. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio X tal que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.
    a) Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.
    b) Probar que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.
    c) Encontrar un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.
    d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para finitos valores de α. Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

---

20. Consideremos el anillo de polinomios en n variables sobre un cuerpo k (e.g. $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$),
$$k[x] = k[x_1, ..., x_n].$$
Para cada subconjunto $S \subset k[x]$ definimos el conjunto algebraico dado por S como
$$V(S) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in k^n : \ p(z_1, \ldots, z_n) = 0 \ \forall \, p \in S\}.$$
Verificar las siguientes propiedades.

a) $V(S) = V(I_S)$, donde I_S es el ideal generado por S.

b) Si $S \subset T$, entonces $V(S) \supset V(T)$. $V(\{0\}) = k^n$, y $V(\{1\}) = \emptyset$.

c) Si $I, J \subset k[x]$ son ideales, entonces $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

d) Si $\{I_a\}_{a\in A}$ es una familia de ideales, entonces $V\left(\bigcup_{a\in A} I_a\right) = \bigcap_{a\in A} V(I_a)$.
Los items b), c), d) muestran que los conjuntos algebraicos verifican los axiomas de los cerrados de una topología. Esta es la **topología de Zariski** de k^n.

e) Los conjuntos $D_f = k^n \setminus V(\{f\})$ forman una base para dicha topología.

f) Si $f \neq 0$ entonces D_f es denso.

21. Para $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y para $n = 1, 2$, caracterizar la topología de Zariski en k^n y compararla con la usual.

---

22. Se define en $\mathbb{R}$ la métrica acotada como $\overline{d}(a, b) = \min\{|a-b|, 1\}$. Probar que induce la misma topología que la usual. Sea $\mathbb{R}^\omega$ el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en $\mathbb{R}^\omega$ la métrica uniforme como $\overline{\rho}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_n\{\overline{d}(a_n, b_n)\}$. Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

23. Decidir si las siguientes funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en $\mathbb{R}$ la toplogía usual y en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme.

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \dots) \qquad g(t) = (t, t, t, \dots) \qquad h(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \dots)$$

24. Decidir si las siguientes sucesiones convergen en $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme.

a) $(1, 1, 1, 1, \dots), (0, 2, 2, 2, \dots), (0, 0, 3, 3, \dots)$, ...

b) $(1, 1, 1, 1, \dots), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right), \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots\right)$, ...

c) $(1, 0, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots)$, ...

d) $(1, 1, 0, 0, \dots), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots)$, ...

25. Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme.

26. Dados $x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ y $0 < \epsilon < 1$, sea

$$U(x, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \dots$$

a) Pruebe que $U(x, \epsilon)$ no es igual a la bola $B_{\overline{\rho}}(x, \epsilon)$, y que ni siquiera es un abierto.

b) Pruebe que $B_{\overline{\rho}}(x, \epsilon) = \cup_{\delta<\epsilon} U(x, \delta)$.

27. Sean $(a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega$ dos sucesiones tales que $a_i \neq 0$ para todo i. Definamos $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ por la fórmula

$$h((x_1, x_2, \dots)) = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, \dots),$$

Dar condiciones sobre los números a_i, b_i para que h sea continua. ¿Y para que h sea un homeomorfismo?