

PRÁCTICA 6: COMPACIDAD - CONTINUIDAD UNIFORME

Compacidad

Ejercicio 1.

- (a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n / n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es compacto.
- (b) Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto.
- (c) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de (\mathbb{Q}, d) , donde d es la métrica euclídea de \mathbb{R} .

Ejercicio 2. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 3. Sea $E = \{e^{(n)} \in \ell^\infty / n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ está definida por

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Probar que E es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 4. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico (X, d) , un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i \in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que:

- (a) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.
- (b) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.
- (c) Un subconjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subseteq X$.

Ejercicio 6. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| / n \in \mathbb{N}\}$$

- (a) Demostrar que para cada $x \in c_0$ la bola cerrada $B[x, 1] = \{y \in c_0 / d_\infty(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.
- (b) Probar que (c_0, d_∞) es separable.

Ejercicio 7. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') lo son.

Ejercicio 8. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Probar que K tiene mínimo y máximo.

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ compacto. Probar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico.

- (a) Sean $K \subseteq X$ un compacto y sea $x \in X \setminus K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K “se realiza”.
- (b) Sean $F, K \subseteq X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva.
- (c) Sean $K_1, K_2 \subseteq X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 “se realiza”.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X .

Ejercicio 12. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d') , la proyección $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada si en $X \times Y$ se considera la métrica d_∞ .

Ejercicio 14. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

- (a) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.
- (b) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.
- (c) Mostrar que $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Continuidad uniforme

Ejercicio 16.

- (a) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.
- (b) Deducir que \sqrt{x} es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- (c) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Ejercicio 17. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 18.

(a) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

I. $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$

II. $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$

entonces f no es uniformemente continua en A .

(b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en \mathbb{R} . ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?

(c) Verificar que la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 19.

(a) Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Probar que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y .

(b) Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 20.

(a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.

(b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 21. Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 22. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subseteq X$ denso y sea $f : D \rightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X , es decir, existe una única función $F : X \rightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).