

## ALGEBRA LINEAL - Práctica N°8 - Segundo cuatrimestre de 2008

### Espacios vectoriales con producto interno

En esta práctica, todos los espacios vectoriales serán sobre  $\mathbb{R}$  o sobre  $\mathbb{C}$  únicamente.

**Ejercicio 1.** Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno sobre  $V$ . Probar:

- i)  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- ii)  $\langle x, cy \rangle = \bar{c} \cdot \langle x, y \rangle$
- iii)  $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle \forall x \in V \Rightarrow y = z$

**Ejercicio 2.** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno. Probar que  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$  si y sólo si  $\{x, y\}$  es un conjunto linealmente dependiente.

**Ejercicio 3.** Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

- i)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$
- ii)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$
- iii)  $\Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$
- iv)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + x_2.\bar{y}_2 - x_1.\bar{y}_2 - x_2.\bar{y}_1$
- v)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + (1 + i).x_1.\bar{y}_2 + (1 + i).x_2.\bar{y}_1 + 3.x_2.\bar{y}_2$
- vi)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = x_1.\bar{y}_1 - i.x_1.\bar{y}_2 + i.x_2.\bar{y}_1 + 2.x_2.\bar{y}_2$
- vii)  $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K$ ,  $\Phi(x, y) = 2.x_1.\bar{y}_1 + x_3.\bar{y}_3 - x_1.\bar{y}_3 - x_3.\bar{y}_1$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 4.** Determinar para qué valores de  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1 + b).x_3.y_3$$

es un producto interno en  $\mathbb{R}^3$ .

**Ejercicio 5.** Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

- i)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K$ ,  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A.B^*)$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$
- ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x).g(x) dx$
- iii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K$ ,  $\langle x, y \rangle = \bar{y} \cdot Q^* \cdot Q \cdot x^t$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$   
donde  $Q \in K^{n \times n}$  es una matriz inversible.
- iv)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_T : V \times V \rightarrow K$ ,  $\langle x, y \rangle_T = \langle T(x), T(y) \rangle$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$   
donde  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales sobre  $K$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno sobre  $W$  y  $T : V \rightarrow W$  es un monomorfismo.

**Ejercicio 6.** Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a  $\mathbb{R}_n[X]$  y calcular su matriz en la base  $B = \{1, X, \dots, X^n\}$ .

**Ejercicio 7.**

- i) Encontrar una base de  $\mathbb{R}^2$  que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 3. iii) con  $K = \mathbb{R}$ .
- ii) Encontrar una base de  $\mathbb{C}^2$  que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 3. vi).

**Ejercicio 8.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ .

- i) Probar que existe un único producto interno en  $V$  para el cual  $B$  resulta ortonormal.
- ii) Hallarlo en los casos
  - a)  $V = \mathbb{C}^2$  y  $B = \{(1, i), (-1, i)\}$
  - b)  $V = \mathbb{R}^3$  y  $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

**Ejercicio 9.** Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de  $V$ :

- i)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S_1 = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle$  para el producto interno canónico.
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S_2 = \langle (1, 2, 1) \rangle$  para el producto interno definido por
 
$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + 2 \cdot x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1.$$
- iii)  $V = \mathbb{C}^3$ ,  $S_3 = \langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle$  para el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$  definido en el Ejercicio 5. iv) con  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ 

$$T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} \cdot x^t \quad \text{y } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ el producto interno canónico sobre } \mathbb{C}^3.$$
- iv)  $V = \mathbb{C}^4$ ,  $S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2i \cdot x_2 - x_3 + (1+i) \cdot x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i) \cdot x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$  para el producto interno  $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot \bar{y}_1 + 2 \cdot x_2 \cdot \bar{y}_2 + x_3 \cdot \bar{y}_3 + 3 \cdot x_4 \cdot \bar{y}_4$ .

**Ejercicio 10.**

- i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para los productos internos considerados.
- ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.
- iii) Hallar el punto de  $S_4$  más cercano a  $(0, 1, 1, 0)$ .

**Ejercicio 11.** Se define  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot g\left(\frac{k}{n}\right)$ .

- i) Probar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno.
- ii) Para  $n = 2$ , calcular  $\langle X \rangle^\perp$ .

**Ejercicio 12.**

- i) Se considera  $\mathbb{C}^{n \times n}$  con el producto interno  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A.B^*)$ . Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.
- ii) Se considera  $\mathbb{R}_3[X]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x) dx$ . Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base  $\{1, X, X^2, X^3\}$ . Hallar el complemento ortogonal del subespacio  $S = \langle 1 \rangle$ .
- iii) Se considera  $C[-1, 1]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x) dx$ . Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ .
- Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio  $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \text{sen}(\pi x) \rangle$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno  $\langle, \rangle$ . Sea  $W \subseteq V$  un subespacio de dimensión finita de  $V$ . Probar que si  $x \notin W$ , entonces existe  $y \in V$  tal que  $y \in W^\perp$  y  $\langle x, y \rangle \neq 0$ .

**Ejercicio 14.** Calcular  $f^*$  para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

- i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x_1, x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
- ii)  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2.x_1 + (1 - i).x_2, x_2 + (3 + 2i).x_3, x_1 + i.x_2 + x_3)$
- iii)  $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- iv)  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ ,  $f(p) = p'$ , donde  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x) dx$ .
- v)  $P \in GL(n, \mathbb{C})$ ,  $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $f(A) = P^{-1}.A.P$ , donde  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A.B^*)$ .
- vi)  $\mu_f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $\mu_f(p) = f.p$ , donde  $f \in \mathbb{R}[X]$  y  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x)dx$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sean  $f_1$  y  $f_2$  endomorfismos de  $V$  y sea  $k$  un escalar. Probar:

- i)  $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$
- ii)  $(k.f_1)^* = \bar{k}.f_1^*$
- iii)  $(f_1 \circ f_2)^* = (f_2)^* \circ (f_1)^*$
- iv) Si  $f_1$  es un isomorfismo, entonces  $f_1^*$  es un isomorfismo y  $(f_1^*)^{-1} = (f_1^{-1})^*$
- v)  $((f_1^*)^*) = f_1$
- vi)  $f_1^* \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$

**Ejercicio 16.** Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Probar que  $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$ .

**Ejercicio 17.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno  $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  sea autoadjunta para  $\langle, \rangle$ .

**Ejercicio 18.** Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $S$  un subespacio de  $V$ . Probar que la proyección ortogonal  $P : V \rightarrow V$  sobre  $S$  es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

**Ejercicio 19.**

- i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz  $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal tal que  $O.A.O^t$  sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

- ii) Encontrar una matriz  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitaria tal que  $U.A.U^*$  sea diagonal, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 20.** Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Se dice que  $f$  es *normal* si  $f \circ f^* = f^* \circ f$ .

- i) Probar que si  $f$  admite una base ortonormal de autovectores, entonces  $f$  es normal.
- ii) Probar que si  $f$  es normal valen las siguientes afirmaciones:
- $\|f(v)\| = \|f^*(v)\| \quad \forall v \in V$ . En particular,  $\text{Nu}(f) = \text{Nu}(f^*)$ .
  - $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $f - \lambda \cdot \text{id}_V$  es normal.
  - Si  $v$  es un autovector de  $f$  de autovalor  $\lambda$ , entonces  $v$  es un autovector de  $f^*$  de autovalor  $\bar{\lambda}$ .
  - $E_\lambda = \{v \in V / f(v) = \lambda \cdot v\}$  es  $f^*$ -invariante.
- iii) Probar que si  $f$  es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.  
(Sugerencia: observar que  $(E_\lambda)^\perp$  es  $f$ -invariante y  $f^*$ -invariante).
- iv) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre  $\mathbb{C}$ . Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 21.** Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{3}$ .
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , simetría respecto de la recta de ecuación  $x_1 - x_2 = 0$ .
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , simetría respecto del plano de ecuación  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ .
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  y eje  $\langle (1, 0, 1) \rangle$ .

**Ejercicio 22.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si  $f$  es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

**Ejercicio 23.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

- i) Probar que  $f$  es una rotación.
- ii) Hallar  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $g \circ g = f$ .

**Ejercicio 24.** Una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se llama *isometría* si verifica que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

- i) Probar que si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una isometría tal que  $f(0) = 0$ ,  $f$  resulta una transformación lineal y además  $f$  es ortogonal.
- ii) Deducir que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una isometría si y sólo si existen  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  transformación ortogonal y  $v \in \mathbb{R}^2$  tales que  $f(x) = g(x) + v$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 25.** *Cálculo de volúmenes.* Consideremos  $\mathbb{R}^n$  con el producto interno canónico  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

El área del paralelogramo  $P(v_1, v_2)$  que definen dos vectores  $v_1$  y  $v_2$  linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  se puede calcular con la fórmula “base por altura”, o sea,  $\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\|$ .

El volumen del paralelepípedo  $P(v_1, v_2, v_3)$  que definen tres vectores  $v_1, v_2, v_3$  linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  sería “área de la base por altura”, o sea,  $\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\|$ .

Si esto se generaliza a  $k$  vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ , el volumen del paralelepípedo  $P(v_1, \dots, v_k)$  sería  $\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\| \cdots \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|$ .

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo  $P(v_1, \dots, v_k)$  definido por los vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  como:

$$\begin{cases} \text{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \text{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Vamos a probar que *el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_n$  en  $\mathbb{R}^n$  es igual a  $|\det(A)|$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ .*

- i) Dados  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  se define  $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$  como  $G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ . Probar:
  - a) Si  $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ , entonces  $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$ .
  - b) Si  $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp$ , entonces  $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|v_k\|^2$ .
  - c)  $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|^2$ .
- ii) Probar que, si  $v_1, \dots, v_k$  son vectores linealmente independientes,  $(\text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k))$ .
- iii) Sean  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  linealmente independientes y sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ . Probar que  $G(v_1, \dots, v_n) = A^t \cdot A$ . Deducir que  $\text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$ .
- iv) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores  $(2, 1)$  y  $(-4, 5)$  en  $\mathbb{R}^2$ . Calcular el volumen del paralelepípedo definido por  $(1, 1, 3)$ ,  $(1, 2, -1)$  y  $(1, 4, 1)$  en  $\mathbb{R}^3$ .
- v) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo. Si  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  son linealmente independientes, probar que  $\text{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f| \cdot \text{vol}(P(v_1, \dots, v_n))$ .