

ALGEBRA LINEAL - Práctica N°6 - Segundo cuatrimestre de 2008

Autovalores y autovectores - Diagonalización

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} & \text{ii)} & A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \text{iii)} & A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{iv)} & A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} & \text{v)} & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{vi)} & A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 2. Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ la transformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(B, U)$.

Ejercicio 3. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

i) Encontrar una base B de \mathbb{R}^3 tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.

i) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$. Determinar todos los a, b y $c \in K$ para los que A es diagonalizable.

ii) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- i) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ donde F_i es el i -ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$).
- ii) Encontrar una matriz $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $P \cdot A \cdot P^{-1}$ sea diagonal.
- iii) Hallar la fórmula general para el término F_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
- iv) Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6 \cdot a_{n+2} - 11 \cdot a_{n+1} + 6 \cdot a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 8. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Sugerencia: Hallar una matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$ sea diagonal y hacer el cambio

de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9. Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Ejercicio 10. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

- i) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible $\Leftrightarrow 0$ no es autovalor de A .
- ii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, x autovector de $A \Rightarrow x$ autovector de A^{-1} .
- iii) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con n impar $\Rightarrow A$ admite un autovalor real.

Ejercicio 11. Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. ¿Es A única?

Ejercicio 12.

- i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de A , sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2 \cdot A$ son -1 , 3 y 8 .
- ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3 \cdot I_4$. Hallar los restantes autovalores de A .

Ejercicio 13.

- i) Sea $f : K^n \rightarrow K^n$ un proyector con $\dim(\text{Im}(f)) = s$. Calcular \mathcal{X}_f . ¿Es f diagonalizable?
- ii) Sea K un cuerpo incluido en \mathbb{C} y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ un morfismo nilpotente. Calcular \mathcal{X}_f . ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.

Ejercicio 15. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$. Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de \mathbb{C}^n tal que $|f|_B$ es triangular superior.

Ejercicio 17. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de \mathcal{X}_A contadas con multiplicidad. Probar que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{y} \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Ejercicio 18. Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times m}$.

- i) Probar que las matrices de $K^{(m+n) \times (m+n)}$ $\begin{pmatrix} A.B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B.A \end{pmatrix}$ son semejantes.
- ii) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{A.B} = \mathcal{X}_{B.A}$.

Ejercicio 19. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

- i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X - 1)^2$
- ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

Ejercicio 21. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el polinomio característico):

- i) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$
- ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- vi) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- vii) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- viii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
- ix) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$
- x) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
- xi) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

Ejercicio 22. Sea $A \in K^{n \times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

Ejercicio 23. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

i) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P' + 2.P$

ii) $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f(A) = A^t$

Ejercicio 24. Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal derivada. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

Ejercicio 25. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2 .

iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2.A^4 - 12.A^3 + 19.A^2 - 29.A + 37.I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2 .

v) Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

vi) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 26. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de \mathcal{X}_f es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f .

Ejercicio 27. Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$. Comparar con el Ejercicio 14.

Ejercicio 28.

- i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 2.y, 2.x - 2.y)$. Hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean f -invariantes.
- ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ . Probar que, para todo $\theta \neq k.\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean f_θ -invariantes.
- iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ la transformación \mathbb{C} -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de \mathbb{C}^2 que sean g_θ -invariantes.

Ejercicio 29. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

- i) Probar que para cada $0 \leq i \leq n$ existe un subespacio S_i de \mathbb{R}^n que es f -invariante.
- ii) Probar que existe un hiperplano de \mathbb{R}^n que es f -invariante pero que no admite un complemento f -invariante.

Ejercicio 30.

- i) Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de V que es f -invariante, probar que $f : S \rightarrow S$ es diagonalizable.
- ii) Sean $A, B \in K^{n \times n}$ tales que $A.B = B.A$ y sea $E_\lambda(A) = \{x \in K^n / A.x = \lambda.x\}$. Probar que $E_\lambda(A)$ es B -invariante.
- iii) Sean $A, B \in K^{n \times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $A.B = B.A$. Probar que existe $C \in GL(n, K)$ tal que $C.A.C^{-1}$ y $C.B.C^{-1}$ son diagonales. (Es decir, A y B se pueden diagonalizar simultáneamente.)

Ejercicio 31.

- i) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.
- ii) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.

Ejercicio 32. Sea $A \in K^{n \times n}$.

- i) Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A .
- ii) Si $K = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $K = \mathbb{R}$?

Ejercicio 33. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.