ALGEBRA LINEAL - Práctica N°1 - Segundo cuatrimestre de 2008

Espacios Vectoriales

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre $K = \mathbb{R}$. ¿Cambia algo si $K = \mathbb{Q}$? ¿Y si $K = \mathbb{C}$?

i) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

ii) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

iii) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

iv) $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Determinar los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

i) Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para que cada uno de los siguientes sistemas tenga alguna solución no trivial y, para esos k, resolverlos.

(a) $$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \\ k^3x_1 + x_2 + k^3x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 + k^2x_2 + kx_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$$

ii) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = 2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}$$

Ejercicio 5. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Ejercicio 7. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales a coeficientes reales cuya solución general sea $(1,1,0) + \lambda(1,2,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Probar en cada caso que el conjunto V con la suma y el producto por escalares definidos es un espacio vectorial sobre K.

i) $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)/a_i \in K\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K (donde K es un cuerpo cualquiera).

$+ \ : \ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$. \ : \ k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

ii) X es un conjunto, $V = \mathcal{P}(X)$, $K = \mathbb{Z}_2$.

$+ \ : \ B + C = B \triangle C$

$. \ : \ 0.B = \emptyset, \quad 1.B = B$

iii) $V = \mathbb{R}_{>0}$, $K = \mathbb{Q}$.

$\oplus \ : \ a \oplus b = a.b$

$\otimes \ : \ \frac{m}{n} \otimes a = \sqrt[n]{a^m}$

Ejercicio 9. Sea V un espacio vectorial sobre K, $k \in K$, $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

i) $k.\vec{0} = \vec{0}$

ii) $-(-v) = v$

iii) $k.v = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$

iv) $-\vec{0} = \vec{0}$

Ejercicio 10.

i) Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector fijo. Se define la función $f_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$f_v(x,y) = (x,y) + v$$

Interpretar geométricamente el efecto de f_v sobre el plano (f_v se llama la *traslación en* v).

ii) Probar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) +_{(2,1)} (x',y') & = & (x + x' - 2, y + y' - 1) \\ r \cdot_{(2,1)} (x,y) & = & r.(x-2, y-1) + (2,1) \end{array}$$

(Este espacio se notará $\mathbb{R}^2_{(2,1)}$ para distinguirlo de $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el $(2,1)$ resulta el neutro de la suma $+_{(2,1)}$).

iii) Interpretar geométricamente $+_{(2,1)}$ y $\cdot_{(2,1)}$, teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) +_{(2,1)} (x',y') & = & f_{(2,1)}(f_{(-2,-1)}(x,y) + f_{(-2,-1)}(x',y')) \\ r \cdot_{(2,1)} (x,y) & = & f_{(2,1)}(r.f_{(-2,-1)}(x,y)) \end{array}$$

Ejercicio 11.

i) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares.

ii) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la multiplicación por escalares pero no para la suma.

Ejercicio 12. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como K-espacio vectorial:

i) $S_3 = \{a.i \,/\, a \in \mathbb{R}\} \quad V = \mathbb{C} \quad K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$

ii) $S_4 = \{f \in K[X] \,/\, f'(1) = 0\} \quad V = K[X]$

iii) $S_7 = \{M \in K^{n\times n} \,/\, M^t = -M\} \quad V = K^{n\times n}$

iv) $S_8 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f'' + 3f' = 0\} \quad V = C^\infty(\mathbb{R}) \quad K = \mathbb{R}$

v) $S_9 = \{v \in \mathbb{R}^2_{(2,1)} \,/\, x + y = 3\} \quad V = \mathbb{R}^2_{(2,1)} \quad K = \mathbb{R}$

vi) $S_{11} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \,/\, \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0 \;\forall\, r \geq k\} \quad V = K^{\mathbb{N}}$

vii) $S_{12} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \,/\, a_1.a_2 = 0\} \quad V = K^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 13. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 14. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes K-espacios vectoriales:

i) $K^{n\times n}$

ii) $\mathbb{C}^n, \;\; K = \mathbb{R}$

iii) $\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \;\; K = \mathbb{Z}_2$

iv) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0 \;;\; x - y = 0\}\,, \;\; K = \mathbb{R}$

v) $S_2 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 \,/\, x + 2y + z = 0\}, \;\; K = \mathbb{Z}_7$

vi) $S_3 = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \,/\, A = -A^t\}\,, \;\; K = \mathbb{Q}$

vii) $S_4 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] \,/\, f(1) = 0$ y $f(2) = f(3)\}\,, \;\; K = \mathbb{R}$

viii) $S_5 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, a_i = 0 \;\forall\, i \geq 5\,;\; a_1 + 2a_2 - a_3 = 0\,;\; a_2 + a_4 = 0\}\,, \;\; K = \mathbb{R}$

ix) $S_6 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,/\, f''' = 0\}\,, \;\; K = \mathbb{R}$

Ejercicio 15. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

i) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v, w \in V$, $k \in K$. Entonces $< v\,,\, w > \,=\, < v\,,\, w + k.v >$.

ii) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $< v_1, v_2, w > \,=\, < v_3, v_4, w >$. Entonces $< v_1\,,\, v_2 > \,=\, < v_3\,,\, v_4 >$.

Ejercicio 16. Sea $S = < (1,-1,2,1),(3,1,0,-1),(1,1,-1,-1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

ii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

iii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

Ejercicio 17. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ como subespacio de V en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S = < (1,1,3),(1,3,5),(6,12,24) > \quad T = < (1,1,0),(3,2,1) >$

ii) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\quad S = \{(x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji} \ \forall\, i,j\} \quad T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$

iii) $V = \mathbb{R}[X]$, $\quad S = \{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f(1) = 0\} \quad T = < 1\,,\, X,\, X^2,\, X^3 + 2X^2 - X,\, X^5 >$

iv) $V = \mathbb{R}[X]$, $\quad S = \{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f(1) = 0\} \quad T = \{f \in \mathbb{R}[X] \,/\, f'(1) = f''(1) = 0\}$

Ejercicio 18. Decidir si los siguientes vectores son linealmente independientes sobre K.

i) $(1-X)^3,\, (1-X)^2,\, 1-X,\, 1$ en $K[X]$

ii) $(1,4,-1,3)\,,\,(2,1,-3,-1)\,,\,(0,2,1,-5)$ en $\mathbb{Q}^4$

iii) $(1-i,i)\,,\,(2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $f(x) = e^x\,,\ g(x) = x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

v) $f(x) = \text{sen}(x),\, g(x) = \cos(x),\, h(x) = x\cos(x)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

vi) $u = (1,0,1,0,1,\ldots)\,,\, v = (0,1,0,1,0,\ldots)\,,\, w = (1,1,0,1,1,0,\ldots)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 19. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\{v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente en los siguientes casos:

i) $\{(k,1,0)\,,\,(3,-1,2)\,,\,(k,2,-2)\} \subset \mathbb{R}^3$

ii) $\{k.X^2 + X\,,\, X^2 - k\,,\, k^2.X\} \subset \mathbb{R}[X]$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

Ejercicio 20. Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R} \iff \{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 21. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

i) $\{(1,1,1,1)\,,\,(0,2,1,1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$

ii) $\{X^3 - 2X + 1\,,\, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}_3[X]$, $K = \mathbb{R}$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 22. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S.

i) $S = < (1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1) > \,\subseteq\, \mathbb{R}^3,\;\; K = \mathbb{R}$

ii) $S = < X^2+2X+1\,,\,X^2+3X+1\,,\,X+2 > \,\subseteq\, \mathbb{R}[X],\;\; K = \mathbb{R}$

iii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2},\;\; K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 23. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales:

i) $\mathbb{C},\;\; K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\{f \in \mathbb{Q}[X]\,/\,f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3$ y $(x^2-2) \mid f\},\;\; K = \mathbb{Q}$

iii) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}\,/\,a_i = a_j\ \forall\, i,j\,\}$

Ejercicio 24. Hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

i) $S = < (1,k,1)\,,\,(-1,k,1)\,,\,(0,1,k) >$

ii) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / A.x = 0\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & k-6 & 5k \\ 1 & k-2 & k^2+4k \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Ejercicio 25. Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S = < (1,2,1,0),(2,1,0,1) > \quad \text{y} \quad T = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Hallar un subespacio U de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim U = 2$ y $S \cap T \subset U \subset T$.

Ejercicio 26. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

i) $< (-2,1,6),(3,0,-8) > \,=\, < (1,\,k,\,2k),\,(-1,-1,\,k^2-2),\,(1,1,k) >$.

ii) $S \cap T = < (0,1,1) >$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = < (1,k,2),(-1,2,k) >$.

Ejercicio 27. En cada uno de los siguientes casos caracterizar $S + T \subseteq V$ y determinar si la suma es directa.

i) $V = \mathbb{R}^3,\;\; S = < (1,1,1) >,\;\; T = < (2,-1,1),(3,0,2) >$

ii) $V = \mathbb{R}[X],\;\; S = \{f \in \mathbb{R}[X]\,/\,f = 0$ ó $\mathrm{gr}(f) \leq 3\},\;\; T = \{f \in \mathbb{R}[X]\,/\,\mathrm{mult}(4,f) \geq 4\}$

iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 3},\;\; S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3}\,/\,A_{11} + A_{21} = 0,\; 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\}$,

$T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ejercicio 28. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^{11}$, $\dim S = \dim T = \dim W = 4 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$.

Ejercicio 29. Sea V un K-espacio vectorial y sean S, T y U subespacios de V.

i) Probar que $(S \cap T) + (S \cap U) \subseteq S \cap (T + U)$.

ii) Mostrar que, en general, la inclusión anterior es estricta.

iii) Probar que, si $U \subseteq S$, entonces vale la igualdad en i).

Ejercicio 30. Sean S, T y U subespacios de un K-espacio vectorial V tales que

$$S \cap T = S \cap U, \qquad S + T = S + U \qquad \text{y} \qquad T \subseteq U.$$

Probar que $T = U$.

Ejercicio 31. Para cada S dado hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso T se dice un *complemento* de S con respecto a V).

i) $S = <(1,2,-1,3)\,,\,(2,3,-2,1)\,,\,(0,1,0,7)>$, $V = \mathbb{R}^4$

ii) $S = <3, 1 + X^2>$, $V = \mathbb{R}_4[X]$

iii) $S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,/\, \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{n\times n}$

Ejercicio 32. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$).

i) Probar que $\forall\, v \notin T$, $T \oplus <v> = V$.

ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.

iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

Ejercicio 33. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

i) Sean $S = \{f \in V \,/\, f(x) = f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in V \,/\, f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$ (S es el conjunto de funciones pares y T el conjunto de funciones impares). Probar que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.

ii) Sean $U = \{f \in V \,/\, f(0) = 0\}$ y $W = \{f \in V \,/\, f \text{ es constante}\}$. Probar que U y W son subespacios de V y que $U \oplus W = V$.

(*) Ejercicio 34.

i) Sea $S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$. Probar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calcular su dimensión.

ii) Encontrar una base de S formada por sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, verifiquen $u_n = u^{n-1}$ para algún $u \in \mathbb{R}$.

iii) Usando ii), encontrar una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$$