

## Práctica No. 3

1. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ . Decidir en cada caso si corresponde  $\subset, \supset$  ó  $=$  y probarlo.

$$\begin{array}{llll}
 (i) & f(A \cup B) & \dots\dots & f(A) \cup f(B) \\
 (ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
 (iii) & f(A \cap B) & \dots\dots & f(A) \cap f(B) \\
 (iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
 (v) & f(\mathbb{R}^n - A) & \dots\dots & \mathbb{R}^m - f(A) \\
 (vi) & f^{-1}(\mathbb{R}^m - X) & \dots\dots & \mathbb{R}^n - f^{-1}(X)
 \end{array}$$

2. Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Probar que  $f$  es continua si y sólo si para todo cerrado  $F \subseteq \mathbb{R}^m$  existe un cerrado  $W_F \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $f^{-1}(F) = W_F \cap S$ .
3. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua tal que  $f(x) = f(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{Q}^n$ . Demostrar que  $f$  es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre  $\mathbb{Q}^n$  son la misma función.
4. Hallar todos los puntos donde la función  $f$  es continua, siendo

(a)  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:
- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$ .
- (b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 < xy + z < 2\}$ .
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$ .
6. Sea  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continua. Demostrar que existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = c$ . [Sug.: considere la función  $x - f(x)$ .]
7. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua. Probar que el gráfico de  $f$  es un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . ¿Vale la recíproca?

8. Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto y sea  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función tal que la imagen de  $f$  es un conjunto acotado y el gráfico de  $f$  es un conjunto cerrado. Demostrar que  $f$  es continua.
9. Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto y sea  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in K$ . Probar que existe  $\alpha > 0$  tal que  $f(x) > \alpha$  para todo  $x \in K$ .
10. Usando la función continua  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  y el ejercicio 11(b) de la guía 2, demostrar que el intervalo  $(-1, 1)$  es conexo. Deducir que cualquier intervalo de la forma  $(a, b)$  es conexo.
11. Sean  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , el segmento  $\overline{vw}$  que une  $v$  con  $w$  se puede describir como:  $\overline{vw} = \{v + t(w - v) : t \in [0, 1]\}$ .
- Demostrar que  $\overline{vw}$  es un conjunto conexo.
  - Sea ahora  $u$  otro punto en  $\mathbb{R}^n$ . Demostrar que la poligonal  $\Pi := \overline{vw} \cup \overline{wu}$  es un conjunto conexo. Convencerse de que cualquier poligonal en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto conexo.
  - Sea  $S = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$  (cf. ejercicio 11(a) de la guía 2). Demostrar que dos puntos cualesquiera de  $S$  pueden unirse por una poligonal totalmente contenida en  $S$  (además formada por segmentos “horizontales” y “verticales”). Deducir que  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$  es conexo.
12. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = \|x\|$ .
  - $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = \|x\|^2$ .
  - $f : (r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  siendo  $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$ , con  $r = 0$  y con  $r > 0$ .
  - $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x, y) = x^2 + 3y$ .
  - $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ .
  - $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = d(x, S)$ , donde  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .
13. Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto arbitrario y sean  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  funciones uniformemente continuas.
- Probar que  $f + g$  es uniformemente continua.
  - Mostrar con un ejemplo que  $f \cdot g$  no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones  $f$  ó  $g$  es acotada.
  - Probar que si  $h : f(S) \rightarrow \mathbb{R}^k$  es otra función uniformemente continua entonces  $h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$  también lo es.
14. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que es uniformemente continua en los intervalos  $[a, b]$  y  $[b, c]$ . Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $[a, c]$ .
- ¿Es cierto que si  $f$  es una función uniformemente continua sobre un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  y también sobre un conjunto  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces lo es en  $A \cup B$ ?

15. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  y  $\alpha$  números reales. Se dice que  $f$  es localmente Lipschitz de orden  $\alpha$  en el punto  $x_0$  si existen  $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$  tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \quad \text{para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

- (a) Demostrar que si  $f$  es localmente Lipschitz de orden  $\alpha > 0$  en  $x_0$  entonces  $f$  es continua en  $x_0$ .
- (b) Demostrar que si  $f$  es localmente Lipschitz de orden  $\alpha > 1$  en  $x_0$  entonces  $f$  es derivable en  $x_0$ .
16. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  siendo  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  siendo  $f(x) = (\cos x, \sin x)$ .

17. Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Demostrar que  $f$  no es Lipschitz pero sin embargo  $f$  es uniformemente continua (en particular “*unif. cont.*  $\not\Rightarrow$  *Lipschitz*”).
18. Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función Lipschitz, es decir, existe  $M \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que

$$\|f(x) - f(x')\| \leq M \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in S.$$

Demostrar que si  $S$  es cerrado,  $M < 1$  y  $f(S) \subseteq S$  entonces existe  $y \in S$  tal que  $f(y) = y$ , en otras palabras,  $f$  tiene un punto fijo.

[Sug.: considere la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $S$  construída recursivamente así:  $x_1 \in S$  cualquiera, si  $x_n$  está definido se toma  $x_{n+1} := f(x_n)$ , en otras palabras,  $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$ . Demostrar que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy; tomar  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .]

Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone  $S$  cerrado.

19. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$ . Demostrar que  $f$  es Lipschitz con  $M = 1$  pero que  $f$  no tiene puntos fijos.
20. Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compacto y  $f : K \rightarrow K$  una función tal que  $\|f(x) - f(x')\| < \|x - x'\|$  para todo  $x, x' \in K$  (en particular,  $f$  es Lipschitz con  $M = 1$ ). Demostrar que  $f$  tiene un punto fijo (comparar con los ejercicios 6, 18 y 19).
- [Sug.: considere la función  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = \|x - f(x)\|$ .]
21. Considérese el conjunto  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ . Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir:  $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . Se define  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  de la manera siguiente:

$$f(x) = \sum_{n \in \Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

donde  $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$ .

Demostrar que:

- (a)  $f$  está bien definida.
- (b)  $f$  es una función monótona creciente.
- (c)  $f$  es discontinua en todo punto del conjunto  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ ; más aún: para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene  $f(x_{n+}) - f(x_{n-}) = \frac{1}{2^n} > 0$ .
- (d)  $f$  es continua a izquierda en todo  $x \in (0, 1)$ ; es decir, para todo  $x \in (0, 1)$  vale que  $f(x-) = f(x)$ .
- (e)  $f$  es continua en todo punto del conjunto  $(0, 1) - \mathbb{Q}$ .
22. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en el conjunto  $S \subset \mathbb{R}$ :
- (a)  $f_n(x) = x^n$ ,  $S = (-1, 1]$ .
- (b)  $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$ ,  $S = (1, +\infty)$ .
- (c)  $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ ,  $S = [0, 1]$ .
23. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 22(a) converge uniformemente en  $T = (0, 1/2)$ , pero en  $S = (-1, 1]$  converge puntualmente a una función que no es continua.
- (b) Probar que la sucesión del ejercicio 22(b) converge uniformemente en  $T = [2, 5]$ .
24. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:
- (a)  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ , sobre todo  $\mathbb{R}$ .
- (b)  $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$ , sobre todo  $\mathbb{R}$ .
- (c)  $f_n(x, y) = \frac{n}{n+1}(x, y)$ , sobre todo  $\mathbb{R}^2$ .
- (d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}, b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$ , sobre  $[0, 1]$ .
25. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

converge puntualmente en  $\mathbb{R}$  a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

26. Sea  $S \subset \mathbb{R}^N$  y sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones  $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$  que converge uniformemente a una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Probar que si  $f_n$  es acotada para cada  $n \in \mathbb{N}$  entonces vale:

- (a)  $f$  es acotada.
- (b) Existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|f_n(x)| \leq M$  para todo  $x \in S$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  (en otras palabras,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es uniformemente acotada).

27. Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de funciones  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

- (a) Probar que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a la función cero en el intervalo  $[0, 1]$ .
- (b) Verificar que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$  y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$ .