COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2007

Práctica 7 - Espacios vectoriales con producto interno

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1 + i).x_1.\overline{y}_2 + (1 + i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1\overline{y}_2 + i.x_2\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$

vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$, $\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

viii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$, $\Phi(x, y) = 3.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_1.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 2.

i) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$.

  a) Probar que Φ es un producto interno.

  b) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 1. vi).

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en V para el cual la base B resulte ortonormal.

i) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

ii) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$

iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

iv) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ la función $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1 + b).x_3.y_3$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle , \rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K,\ \ \langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\langle , \rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ \ \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\,dx$

iii) $\langle , \rangle : K^n \times K^n \to K,\ \ \langle x, y\rangle = \overline{y}.\, Q^*.Q.\, x^t$
donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 6. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 7. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

i) $V = \mathbb{R}^3\,,\ S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$ para el producto interno canónico.

ii) $V = \mathbb{R}^3\,,\ S_2 = <(1, 2, 1)>$

a) Para el producto interno canónico.

b) Para el producto interno definido por $\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1$.

iii) $V = \mathbb{C}^3\,,\ S_3 = <(i, 1, 1), (-1, 0, i)>$ para el producto interno canónico

iv) $V = \mathbb{C}^4\,,\ S_4 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + (1+i).x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i).x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\}$
para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.

v) $V = \mathbb{R}^4\,,\ S_5 = <(1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1)>$ para el producto interno canónico.

Ejercicio 8.

i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.

ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

iii) Hallar el punto de S_5 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$. Calcular la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S_5.

Ejercicio 9.

i) Se considera $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x)\ dx$.

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1,\ X,\ X^2,\ X^3\}$.

b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = <1>$.

iii) Se considera $C[-1,1]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\ dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = <1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \operatorname{sen}(\pi x)>$.

iv) Se considera $C[0,\pi]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{0}^{\pi} f(t).g(t)\ dt$.

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos t, \operatorname{sen} t\}$.

b) Sea S el subespacio de $C[0,\pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 10. Calcular f^* para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (3.x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

ii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

iii) $B = \{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,1)\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iv) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(p) = p'$, donde $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\ dx$.

v) $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $f(A) = P^{-1}.A.P$, donde $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible y $\langle A,B\rangle = tr(A.B^*)$.

vi) $\mu_f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $\mu_f(p) = f.p$, donde $f \in \mathbb{R}[X]$ y $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x).q(x)\ dx$.

Ejercicio 11. Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal. Probar que $\operatorname{Im}(f^*) = (\operatorname{Nu}(f))^{\perp}$.

Ejercicio 12. Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $P : V \to V$ sobre S es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

Ejercicio 13.

i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O.A.O^t$ sea diagonal:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

ii) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U.A.U^*$ sea diagonal:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 14. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $< (1, 0, 1) >$.

Ejercicio 15. Dada la tranformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

i) Probar que f es una rotación.

ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Aplicación del producto interno y del determinante al cálculo de volúmenes

Consideremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico $\langle , \rangle$.
El área del paralelogramo $P(v_1, v_2)$ que definen dos vectores v_1 y v_2 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ se puede calcular con la fórmula "base por altura", o sea

$$\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.$$

El volumen del paralelepípedo $P(v_1, v_2, v_3)$ que definen tres vectores v_1, v_2, v_3 linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ sería "área de la base por altura", o sea

$$\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.\, \|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\|.$$

Si esto se generaliza a k vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ sería

$$\|v_1\|.\, \|p_{<v_1>^\perp}(v_2)\|.\, \|p_{<v_1,v_2>^\perp}(v_3)\| \dots \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|.$$

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_k)$ definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\begin{cases} \operatorname{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Demostrando los ítems i), ii) y iii) siguientes, se prueba que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes $v_1, \dots, v_n$ en $\mathbb{R}^n$ es igual a $|\det(A)|$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

Dados $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se define la matriz $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ como

$$G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle.$$

i) Probar que:

   a) $v_k \in < v_1, \dots, v_{k-1} > \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$.
   b) $v_k \in < v_1, \dots, v_{k-1} >^\perp \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|v_k\|^2$.
   c) $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})).\, \|p_{<v_1,\dots,v_{k-1}>^\perp}(v_k)\|^2$.

ii) Probar que, si $v_1, \dots, v_k$ son vectores linealmente independientes,

$$(\operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k)).$$

iii) Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \dots, v_n$.

   a) Probar que $G(v_1, \dots, v_n) = A^t.\, A$.
   b) Deducir que $\operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$.

iv) a) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(2, 1)$ y $(-4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$.
   b) Calcular el volumen del paralelepípedo definido por $(1, 1, 3)$, $(1, 2, -1)$ y $(1, 4, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

v) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. Probar que, si $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes,

$$\operatorname{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f|.\, \operatorname{vol}(P(v_1, \dots, v_n)).$$