COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2007

Práctica 5 - Diagonalización

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ iv $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Ejercicio 2. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ vi) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3. Para cada una de las matrices A de los ejercicios 1 y 2, sea U una base de K^n (n=2 para las del ejercicio 1 y n=3 o 4 para las del ejercicio 2) y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

Ejercicio 4. Sean A, C y $D \in K^{n\times n}$ tales que $A = C.\,D.C^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = C.\,D^n.\,C^{-1}$

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4.y, -2x + y + 3.z).$$

i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6. Dada $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

Ejercicio 7. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable (ver Ejercicio 15 de la Práctica 3). Calcular $\mathcal{X}_f$.

Ejercicio 8. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Se define la sucesión de Fibonacci $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

i) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $A.\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$.

ii) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

iii) Encontrar una matriz inversible P tal que $P.A.P^{-1}$ sea diagonal.

iv) Hallar la fórmula general para el término a_n, $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

v) Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6.a_{n+2} - 11.a_{n+1} + 6a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 10. Encontrar una fórmula general para x_n e y_n $\forall n \in \mathbb{N}_0$ en función de x_0 e y_0 (ecuaciones en diferencias):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

Ejercicio 11. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

ii) Probar que A es inversible si y sólo si 0 no es autovalor de A.

iii) Sea A inversible. Probar que si x es un autovector de A, entonces x es un autovector de A^{-1}. Si x es un autovector de A de autovalor λ, cuál es el autovalor correspondiente a x como autovector de A^{-1}?

Ejercicio 12. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (a) $P = X - 1$, (b) $P = X^2 - 1$, (c) $P = (X-1)^2$

ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$

Ejercicio 13. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

v) Probar que en general, si A es inversible $n \times n$, puede utilizarse el teorema de Hamilton Cayley para escribir A^{-1} como un polinomio en A de grado $n-1$.

Ejercicio 14.

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3.y, 3.x - 2.y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ:

$$|f_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Probar que, para todo $\theta \neq k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes. ¿Qué pasa si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$?

iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

iv) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $r_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz en base canónica es

$$|r_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir que r_θ es la rotación de ángulo θ alrededor del eje z. ¿Es r_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^3$ que sean r_θ-invariantes.

Ejercicio 15. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

i) Probar que el subespacio $< (2, -1, 0, 0), (-1, 2, -1, 0) >$ es f_A-invariante.

ii) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$|f_A|_B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 16. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Probar que, si S y T son f-invariantes, existen una base B de V y matrices $A_1 \in K^{s\times s}$ y $A_2 \in K^{t\times t}$ tales que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Probar que, en este caso, $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{A_1}.\mathcal{X}_{A_2}$.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0).$$

i) Hallar, para cada $0 \leq i \leq 5$, un subespacio S_i de $\mathbb{R}^5$ con $\dim(S_i) = i$ que sea f-invariante.

ii) Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$.

Ejercicio 18.

i) Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = e^{\lambda x}$ es un autovector de δ asociado al autovalor λ. (Observar que entonces δ tiene infinitos autovalores.)

ii) Sea $\delta_2 = \delta \circ \delta$. Probar que e^x y e^{-x} son autovectores de δ_2 de autovalor 1 y que $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} = < e^x, e^{-x} >$.

Sugerencia: Llamar $g = f'$ y considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$

iii) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$