COMPLEMENTOS DE MATEMATICA 3 - Segundo cuatrimestre de 2007

Práctica 4 - Determinantes

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.

i) Hallar una matriz $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ de la forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con A, B, C y D en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\det(M) \neq \det(A).\det(D) - \det(B).\det(C)$.

ii) Ver que si M, A, B, C, D son como en i), pero $C = 0$, entonces vale que $\det(M) = \det(A).\det(D) - \det(B).\det(C) = \det(A).\det(D)$. Qué sucede si $D = 0$?

Ejercicio 3. Calcular el determinante de las siguientes matrices $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$. ¿Cuánto vale el determinante de A si $b = -2$? Calcular el determinante de la matriz A para cada valor de b.

Ejercicio 5. Dadas las matrices A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $A.C = C.B$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

Ejercicio 6. Resolver los siguientes sistemas lineales sobre $\mathbb{R}$ empleando la regla de Cramer:

i) $\begin{cases} 3.x_1 - 2.x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2.x_3 &= 1 \\ 2.x_1 + x_2 + 4.x_3 &= 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2.x_2 - 4.x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \\ 5.x_1 + x_2 - 3.x_3 + 2.x_4 &= 0 \end{cases}$

Ejercicio 7. Dadas las funciones reales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ que satisfacen

$$\begin{cases} x_1(t) + t.\, x_2(t) + t^2.\, x_3(t) &= t^4 \\ t^2.\, x_1(t) + x_2(t) + t.\, x_3(t) &= t^3 \\ t.\, x_1(t) + t^2.\, x_2(t) + x_3(t) &= 0 \end{cases}$$

calcular $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)$.

Ejercicio 8. Sean $v_1 = (a, b, c)$ y $v_2 = (d, e, f)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por

$$\varphi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

i) Probar que φ es una transformación lineal.

ii) Probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\varphi(x, y, z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $< v_1, v_2 >$.

Ejercicio 9.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Probar que el sistema $A.x = 0$ tiene solución única si y sólo si a y b no son ambos iguales a cero.

ii) Analizar la validez de la afirmación anterior si $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

iii) Similarmente, sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$

Probar que el sistema $A.x = 0$ tiene solución única si y sólo si a, b, c, d no son todos iguales a cero. Analizar la validez de esta afirmación si $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

Ejercicio 10. Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

Ejercicio 11. Sea $A \in K^{3\times 3}$ no inversible tal que $A_{11}.A_{33} - A_{13}.A_{31} \neq 0$. Calcular la dimensión de $S = \{x \in K^3 / \, A.x = 0\}$.

Ejercicio 12. Dada la matriz de *Vandermonde*:

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

probar que $\det(V(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (k_j - k_i)$.

Ejercicio 13. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, todos distintos. Probar que las funciones $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Deducir que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no tiene dimensión finita.

(Sugerencia: Derivar $n-1$ veces la función $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.)

Ejercicio 14.

i) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible. Calcular $\det(\operatorname{adj}(A))$.

ii) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz tal que $\operatorname{rg}(A) < n-1$. Probar que $\operatorname{adj}(A) = 0$.

$(*)$ iii) Sea $A \in K^{n\times n}$ tal que $\operatorname{rg}(A) = n-1$. Probar que $\operatorname{rg}(\operatorname{adj}(A)) = 1$.