Complementos de Matemática 3 para físicos

Teorema de Hamilton-Cayley

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\chi_A(x) = \det(xI - A) \in \mathbb{C}[x]$ su polinomio característico. Entonces, $\chi_A(A) = 0$

Demostración: Llamemos $M_x = xI - A$ y B_x su matriz adjunta. Notar que como los coeficientes de B_x son determinantes $(n-1)\times(n-1)$ de M_x (salvo signo)

$$B_x = x^{n-1}B_{n-1} + x^{n-1}B_{n-2} + \dots + xB_1 + B_0$$

con $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Escribamos $\chi_A(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$.

Entonces, $M_x \cdot B_x = \chi_A(x) \cdot I$, o sea

$$(xI - A)\cdot(x^{n-1}B_{n-1} + \dots + xB_1 + B_0) = (x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0)\, I$$
$$= x^n I + x^{n-1} c_n I + \dots + x c_1 I + c_0 I,$$

de donde se siguen las siguientes igualdades para cada potencia de x:

$$\begin{aligned}
-AB_0 &= c_0 I\\
(B_0 - AB_1) &= c_1 I\\
(B_1 - AB_2) &= c_2 I\\
&\vdots\\
(B_{n-2} - AB_{n-1}) &= c_{n-1} I\\
B_{n-1} &= I
\end{aligned}$$

Multiplicamos cada igualdad por $I, A, \dots, A^n$, tenemos

$$\begin{aligned}
-AB_0 &= c_0 I\\
AB_0 - A^2B_1 &= c_1 A\\
A^2B_1 - A^3B_2 &= c_2 A^2\\
&\vdots\\
A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} &= c_{n-1}A^{n-1}\\
A^nB_{n-1} &= A^n
\end{aligned}$$

Sumando a la izquierda, los términos se cancelan todos y da 0
||
Sumando a la derecha obtenemos $\chi_A(A)$

Luego $\chi_A(A) = 0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ //