Geometría proyectiva

Segundo cuatrimestre 2007

Soluciones de los ejercicios del segundo parcial

Ejercicio 1. Sea C el cono $\{x^2 + y^2 = z^2\}$, y sean $P = (1, 0, 1)$ y $Q = (0, 2, 2)$. Hallar una geodésica de C que una P con Q.

Solución. El cono de una curva contenida en la esfera es una superficie isométrica al plano. Concretamente, si $\alpha : I \to S^2$ es una curva parametrizada por longitud de arco y $r = r^\alpha : \mathbb{R}_{>0} \times I \to S^\alpha \subset \mathbb{R}^3$ es la superficie definida por $r(u, v) = u\alpha(v)$, entonces la primera forma de S^α es

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix},$$

que claramente no depende de la curva α. Cuando β es la curva $(\cos s, \sin s, 0)$, la superficie $S^\beta = U$ construida como antes es un abierto del plano, de donde se sigue que S^α es isométrica al plano para cualquier elección de α. La isometría viene dada por

$$\phi = r^\alpha (r^\beta)^{-1} : U \to S^\alpha.$$

En nuestro caso particular, tomamos α como una parametrización por longitud de arco de la intersección del cono C con la esfera S^2. Luego, $I = (\theta, \theta + \sqrt{2}\pi)$ y $\alpha : I \to S^2$ esta dada por $\alpha(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}})$, de modo que S^α es la superficie que se obtiene al extraer de C la recta cuya proyección sobre el plano xy tiene ángulo θ.

Sea $\phi : U \to S^\alpha$ la isometría de arriba y sean $P' = \phi^{-1}(P), Q' = \phi^{-1}(Q) \in U$. Como una isometría respeta geodésicas, se puede obtener la parametrización de una geodésica de C que pase por P y por Q al componer con ϕ una geodésica de U que pase por P' y Q'. Como U es un abierto del plano xy, sigue que sus geodésicas son las rectas. Finalmente, si $c(t)$ es una parametrización con velocidad constante del segmento $P'Q'$, entonces $\phi \circ c$ es la geodésica buscada.

Ejercicio 2. Probar que si $r : U \to S$ es una parametrización ortogonal ($F = 0$) de una superficie S tal que las curvas $r(t, v_0)$ y $r(u_0, t)$ son geodésicas para todos u_0, v_0, entonces S es localmente isométrica al plano.

Solución. Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas

$$u'' + (u')^2\Gamma^1_{11} + u'v'\Gamma^1_{12} + (v')^2\Gamma^1_{22} = 0$$

$$v'' + (u')^2\Gamma^2_{11} + u'v'\Gamma^2_{12} + (v')^2\Gamma^2_{22} = 0$$

nos permiten calcular los símbolos de Christoffel de S. Como $(u, v) = (t, v_0)$ es geodésica, sigue de la primera ecuación que $\Gamma^1_{11} = 0$, y de la segunda que $\Gamma^2_{11} = 0$. Análogamente con

$(u, v) = (u_0, t)$ obtenemos $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$. De las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2} E_u \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_u - \frac{1}{2} E_v \\
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_v - \frac{1}{2} G_u \\
\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2} G_v
\end{aligned}$$

Sigue que $E_u = E_v = G_u = G_v = 0$, por lo que los coeficientes de la primera forma E y G son constantes. Finalmente, la función $r(\sqrt{\frac{1}{E}}u, \sqrt{\frac{1}{G}}v)$ define una isometría entre un abierto de U y S.

Ejercicio 3. Para cada $F \in k[x, y, z]_2$ consideramos su cónica asociada

$$C(F) = \left\{ p \in \mathbb{P}^2(k) | F(p) = 0 \right\}.$$

1. Probar que dados 5 puntos en $\mathbb{P}^2(k)$ siempre existe una cónica que pasa por ellos.
2. Exhibir seis puntos de $\mathbb{P}^2(k)$ tales que no estén contenidos en ninguna cónica.

Solución. (a). Sea $F = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz \in k[x, y, z]_2$, y sea $p = (p_1 : p_2 : p_3) \in \mathbb{P}^2(k)$. El punto p está en la cónica $C(F)$ si y sólo si se satisface la siguiente ecuación, lineal en los coeficientes de F

$$ap_1^2 + bp_2^2 + cp_3^2 + dp_1p_2 + ep_1p_3 + fp_2p_3 = 0.$$

Dados 5 puntos en $\mathbb{P}^2(k)$, el problema de hallar una cónica que pase por ellos consiste entonces en elegir los coeficientes (a, b, c, d, e, f) de modo que no sean todos nulos y que satisfagan 5 ecuaciones lineales. Como hay cinco ecuaciones y seis incógnitas, un argumento básico de álgebra lineal nos asegura la existencia de tal vector.

(b). Consideremos los seis puntos $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, $(1 : 1 : 0)$, $(1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 1)$. Por lo dicho anteriormente, si F define una cónica que pasa por estos seis puntos, entonces sus coeficientes (a, b, c, d, e, f) deben satisfacer el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz del sistema de seis por seis tiene determinante no nulo, concluimos que no existe una solución no trivial y por lo tanto no hay una cónica que pase por estos seis puntos.

Ejercicio 4. Sean $C_A, C_B \subset \mathbb{C}^2$ las curvas definidas por

$$\begin{aligned} A &= -4x^2 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 6xy + 3x + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ B &= 2x - 1 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2xy + y^3 + y^2. \end{aligned}$$

Hallar los puntos singulares de C_A y C_B, clasificarlos y exhibir las rectas tangentes en dichos puntos.

Solución. Los puntos singulares de una curva dada por un polinomio $P \in \mathbb{C}[x, y]$ son los ceros comunes de P, P_x y P_y.

(A). Planteamos el sistema

$$\begin{aligned} A &= -4x^2 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 6xy + 3x + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0 \\ A_x &= -8x + 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 6y + 3 = 0 \\ A_y &= 3x^2 + 6xy - 6x + 3y^2 - 6y + 3 = 0. \end{aligned}$$

Restando las dos últimas ecuaciones sigue que si (x, y) es solución, entonces $x = 0$. Evaluando $x = 0$ en la segunda ecuación se obtiene $0 = 3y^2 - 6y + 3$, de donde $y = 1$. Luego el único punto singular posible es el $(0, 1)$. Evaluamos los tres polinomios en este punto y verificamos que efectivamente es un punto singular.

Para clasificarlo y exhibir las rectas tangentes calculamos la forma principal del desarrollo de Taylor de A en el punto. Ésto puede hacerse de dos maneras: estudiando el comportamiento de $A(x, y + 1)$ en el $(0, 0)$ o calculando los coeficientes del desarrollo de Taylor con las derivadas sucesivas de A. Desarrollaremos la segunda.

$A_{xx}(0, 1) = -2$, $A_{xy}(0, 1) = 0$ y $A_{yy}(0, 1) = 0$, luego la forma principal de A en $(0, 1)$ es $-x^2$, de donde la singularidad es de orden 2, es una cúspide (tangente doble), y la recta tangente a C_A en $(0, 1)$ es $x = 0$.

(B). Planteamos el sistema

$$\begin{aligned} B &= 2x - 1 + x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2xy + y^3 + y^2 = 0 \\ B_x &= 2 + 3x^2 + 6xy + 3y^2 + 2y = 0 \\ B_y &= 3x^2 + 6xy + 2x + 3y^2 + 2y = 0. \end{aligned}$$

Restando las dos últimas ecuaciones sigue que si (x, y) es solución, entonces $x = 1$. Evaluando $x = 1$ en la segunda ecuación se obtiene $0 = 3y^2 + 8y + 5$, de donde $y = -1$ o $y = -\frac{5}{3}$. Luego los únicos puntos singulares posibles son $(1, -1)$ y $(1, -\frac{5}{3})$. Evaluamos los tres polinomios en estos puntos y verificamos que $(1, -1)$ es un punto singular mas no así $(1, -\frac{5}{3})$.

Para clasificarlo y exhibir las rectas tangentes calculamos la forma principal del desarrollo de Taylor de B en el punto.

$B_{xx}(1, -1) = 0$, $B_{xy}(1, -1) = 2$ y $B_{yy}(1, -1) = 2$, luego la forma principal de B en $(1, -1)$ es $2(x - 1)(y + 1) + (y + 1)^2 = (2x + y - 1)(y + 1)$, de donde la singularidad es de orden 2, es un nodo (dos tangentes distintas), y las rectas tangentes a C_B en $(1, -1)$ son $2x + y - 1 = 0$ y $y + 1 = 0$.