Geometría proyectiva

Segundo cuatrimestre 2007

Soluciones de los ejercicios del primer parcial

Ejercicio 1. Sea T el toro que se obtiene al hacer rotar respecto del eje z el círculo unitario $z^2 + (y-2)^2 = 1$.

(a) Hallar la primera y la segunda forma fundamental de T.

(b) Clasificar los puntos de T en planos, parabólicos, elípticos e hiperbólicos.

Solución. La función

$$r(u, v) = ((\cos u + 2)\cos v, (\cos u + 2)\sin v, \sin u)$$

es una parametrización del toro T. El toro no puede cubrirse por una sola carta, pero bastará por considerar las cartas que se obtienen al restringir r a abiertos $U \subset \mathbb{R}^2$ de la forma $(\theta_1, \theta_1 + 2\pi) \times (\theta_2, \theta_2 + 2\pi)$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

(a). Fijemos $p \in T$ y elijamos θ_1 y θ_2 de forma que $p = r(u, v)$ con $\theta_1 < u < \theta_1 + 2\pi$ y $\theta_2 < v < \theta_2 + 2\pi$. Sea $\beta = \{r_u, r_v\}$ la base del espacio tangente. Los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por

$$\begin{aligned} E &=< r_u, r_u >= 1 \\ F &=< r_u, r_v >= 0 \\ G &=< r_v, r_v >= (\cos u + 2)^2 \end{aligned}$$

Luego, la primera forma fundamental de T en el punto $p = r(u, v)$ es

$$\|I_p\|_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\cos u + 2)^2 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental están dados por

$$\begin{aligned} e &=< r_{uu}, N >= 1 \\ f &=< r_{uv}, N >= 0 \\ g &=< r_{vv}, N >= (\cos u + 2)\cos u \end{aligned}$$

donde $N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$ es el vector normal unitario. Luego, la segunda forma fundamental de T en el punto $p = r(u, v)$ es

$$\|II_p\|_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\cos u + 2)\cos u \end{pmatrix}$$

(b). Sea $p = (x, y, z) = r(u, v)$. Sea a_p la matriz del morfismo de Gauss en la base $\{r_u, r_v\}$. Usando la fórmula

$$I_p.a_p = II_p$$

sabemos que el determinante de a_p es igual a $det(I_p)^{-1}det(II_p) = \frac{\cos u}{\cos u + 2}$. Luego,

- p es *elíptico* si $\cos u > 0$ (equiv. $\|x, y\| > 2$);
- p es *parabólico* si $\cos u = 0$ (equiv. $|z| = 1$);
- p es *hiperbólico* si $\cos u < 0$ (equiv. $\|x, y\| < 2$).

En resumen, los puntos del lado de adentro son hiperbólicos, los de afuera elípticos y los del medio parabólicos. El toro no tiene puntos planos, pues $II_p \neq 0$ para todo p.

Ejercicio 2. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable con curvatura nunca nula. Probar que $\det(n(t), n'(t), n''(t)) = 0$ para todo t si y sólo si α es una curva plana o una hélice.

Solución. Sin perder generalidad, suponemos que α está parametrizada por longitud de arco. Usando las ecuaciones de Frenet tenemos

$$n' = -\kappa t + \tau b \qquad \text{y} \qquad n'' = -\kappa' t - (\kappa^2 + \tau^2) n + \tau' b.$$

Desarrollando la expresión y escribiendo en base $\{t, n, b\}$ obtenemos

$$\det(n(t), n'(t), n''(t)) = \tau'\kappa - \tau\kappa' = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa^2$$

Si α es plana entonces $\tau \equiv 0$. Si α es una hélice entonces $\frac{\tau}{\kappa}$ es constante. En ambos casos, el determinante se anula para todo t.

Si el determinante se anula para todo t, como $\kappa^2 \neq 0$, tenemos que $(\frac{\tau}{\kappa})' \equiv 0$ y por lo tanto $\frac{\tau}{\kappa}$ es constante. Si esta constante es cero entonces $\tau \equiv 0$ y la curva es plana. Si esta constante es distinta de cero, entonces α es una hélice.

Ejercicio 3. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión d. Definimos

$$TX = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in X, y \in TX(x)\}$$

(a) Probar que T es subvariedad diferencial de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ de dimensión $2d$.

(b) Sean además Y una subvariedad de $\mathbb{R}^m$ y $f : X \to Y$ diferenciable. Probar que $df : TX \to TY$ definida por $df(x, y) = (f(x), df(x)(y))$ es diferenciable.

(c) Probar que si X es subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión d con un atlas consistente de una sola carta, entonces TX es difeomorfo a $X \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{n+d}$.

Solución. (a). Debemos ver que TX tiene un atlas, es decir, que se puede cubrir con cartas.

Dado $(x, y) \in TX$, existe (U, U', ϕ) carta de X tal que $x \in \phi(U) = U' \cap X$. Recordar que $U \subset \mathbb{R}^d$ es abierto, $U' \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva, regular, diferenciable y con inversa continua satisfaciendo $\phi(U) = X \cap U'$.

Definimos $V = U \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{2d}$, $V' = U' \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^{2n}$ la función

$$\psi(u, v) = (\phi(u), d\phi_u(v))$$

Afirmamos que (V, V', ψ) es una carta de TX tal que $(x, y) \in \psi(V) = V' \cap TX$. Luego todo punto de TX pertenece a una carta de dimensión $2d$ y queda demostrado el enunciado.

Comprobemos entonces que (V, V', ψ) es efectivamente una carta.

- V y V' son abiertos de las dimensiones correctas. Además es claro que $\psi(V) = V' \cap TX$.

- ψ es diferenciable. Cada una de sus coordenadas es diferenciable (las primeras coinciden con las de ϕ y las últimas son lineales).

- ψ es inyectiva. Si $\psi(u_1, v_1) = \psi(u_2, v_2)$ entonces $(\phi(u_1), d\phi_{u_1}(v_1)) = (\phi(u_2), d\phi_{u_2}(v_2))$. Como ϕ es inyectiva sigue que $u_1 = u_2$ y como ϕ es regular sigue que $d\phi_{u_1}$ es inyectiva y $v_1 = v_2$.

- ψ es regular. Su matriz diferencial $d\psi_{(u,v)}$ es la matriz con bloques

$$d\psi_{(u,v)} = \begin{pmatrix} d\phi_u & * \\ 0 & d\phi_u \end{pmatrix}.$$

  Como ϕ es regular, la matriz $d\phi_u$ tiene rango d y por lo tanto $d\psi_{(u,v)}$ tiene rango $2d$.

- $\psi^{-1} : \psi(V) \to V$ es continua. La función ψ^{-1} está dada por la fórmula

$$\psi^{-1}(x, y) = (\phi^{-1}(x), (d\phi_{\phi^{-1}(x)})^{-1} y).$$

  Es claro que esta función es continua porque cada una de sus coordenadas es composición y producto de funciones continuas (recordar que ϕ^{-1} es continua por hipótesis).

(b). Sean $x_0 \in X$ y $v_0 \in TX_{x_0}$. Como f es diferenciable en x_0, existen $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $F : W \to \mathbb{R}^m$ diferenciable tal que $x_0 \in W$ y $F|_{W \cap X} = f$. La función $G : W \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2m}$ definida por $G(x, v) = (F(x), dF_x(v))$ es diferenciable, $(x_0, v_0) \in W \times \mathbb{R}^n$ y además $G|_{W \times \mathbb{R}^n \cap TX} = df$. Por lo tanto, df es diferenciable en (x_0, v_0).

(c). Sea (U, U', ϕ) una carta que cubre todo X. El difeomorfismo $g : X \times \mathbb{R}^d \to TX$ está dado por

$$g(\phi(u), y_1, ..., y_d) = (\phi(u), \sum_{j=1}^{d} y_j \phi_j(u))$$

donde ϕ_j denota la j-ésima derivada parcial de ϕ. La diferenciabilidad de g^{-1} sigue de equivalencia entre la definición dada en las clases teóricas y de la propiedad (M) vista en las clases prácticas.

Ejercicio 4. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva diferenciable dada por $\alpha(t) = (t, t^2/2, t^3/3)$. Sean t_1, t_2, t_3 tres números reales distintos. Sea π_i el plano osculador de α en $\alpha(t_i)$ para $i = 1, 2, 3$.

(a) Probar que π_1, π_2 y π_3 se intersecan en un punto $p \in \mathbb{R}^3$.

(b) Demostrar que los puntos $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$ y $\alpha(t_3)$ generan un plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$.

(c) Probar que $p \in \pi$.

Solución. (a). Un punto (x,y,z) pertenece a π_i $(i=1,2,3)$ si y sólo si

$$\begin{Vmatrix} x-t_i & y-t_i^2/2 & z-t_i^3/3 \\ 1 & t_i & t_i^2 \\ 0 & 1 & 2t_i \end{Vmatrix} = 0$$

o equivalentemente

$$t_i^2 x - 2t_i y + z = t_i^3/3$$

Por lo tanto, $(x,y,z) \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ si y sólo si (x,y,z) es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -2y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^3/3 \\ t_2^3/3 \\ t_3^3/3 \end{pmatrix}$$

La matriz de la izquierda es inversible (es una matriz de Vandermonde), por lo que existe una única solución al sistema. Esto prueba que la intersección consta de un solo punto.

(b). Tres puntos en el espacio generan un plano si y sólo si no están contenidos en una recta. Supongamos que $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$ y $\alpha(t_3)$ están contenidos en una recta. Luego, proyectando sobre las dos primeras coordenadas, los puntos $(t_1, t_1^2/2)$, $(t_2, t_2^2/2)$ y $(t_3, t_3^2/2)$ están alineados. Como la intersección de una parábola ($Y = X^2/2$) y una recta consta de a lo sumo dos puntos, hemos llegado a un absurdo.

(c). El plano π está dado por la siguiente ecuación

$$\begin{Vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & t_1 & t_1^2/2 & t_1^3/3 \\ 1 & t_2 & t_2^2/2 & t_2^3/3 \\ 1 & t_3 & t_3^2/2 & t_3^3/3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Sea $p=(x,y,z)$ la intersección de π_1, π_2 y π_3, y sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & t_1 & t_1^2/2 & t_1^3/3 \\ 1 & t_2 & t_2^2/2 & t_2^3/3 \\ 1 & t_3 & t_3^2/2 & t_3^3/3 \end{pmatrix}.$$

Según las ecuaciones de los planos osculadores exhibidas en (a), tenemos

$$-z + 2yt_i - xt_i^2 + t_i^3/3 = 0$$

para $i=1,2,3$. Luego $A(-z, 2y, -2x, 1)^t = 0$ y por lo tanto $det(A) = 0$. Esto prueba que p está en π.