

1	2	3	4	Calif.

Apellido y nombre:

LU:

Geometría Projectiva

Primer parcial - 10/10/07

1. Sea T el toro que se obtiene al hacer rotar respecto del eje z el círculo unitario $z^2 + (y - 2)^2 = 1$.
 - a) Hallar la primera y la segunda forma fundamental de T .
 - b) Clasificar los puntos de T en planos, parabólicos, elípticos e hiperbólicos.
2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable con curvatura nunca nula. Probar que $\det(n(t), n'(t), n''(t)) = 0$ para todo t si y sólo si α es una curva plana o una hélice.
3. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión d . Definimos

$$TX = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in X, y \in TX(x)\}$$

- a) Probar que T es subvariedad diferencial de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ de dimensión $2d$.
 - b) Sean además Y una subvariedad de \mathbb{R}^m y $f : X \rightarrow Y$ diferenciable. Probar que $df : TX \rightarrow TY$ definida por $df(x, y) = (f(x), df(x)(y))$ es diferenciable.
 - c) Probar que si X es subvariedad de \mathbb{R}^n de dimensión d con un atlas consistente de una sola carta, entonces TX es difeomorfo a $X \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{n+d}$.
4. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la curva diferenciable dada por $\alpha(t) = (t, t^2/2, t^3/3)$. Sean t_1, t_2, t_3 tres números reales distintos. Sea π_i el plano osculador de α en $\alpha(t_i)$ para $i = 1, 2, 3$.
 - a) Probar que π_1, π_2 y π_3 se intersecan en un punto $p \in \mathbb{R}^3$.
 - b) Demostrar que los puntos $\alpha(t_1), \alpha(t_2)$ y $\alpha(t_3)$ generan un plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$.
 - c) Probar que $p \in \pi$.

Justifique todas las respuestas