Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre, 2007

Lista de ejercicios prácticos N° 6
Nociones de geometría riemanniana

Ejercicio 0.1. *Sea ∇ una conexión sobre una variedad M, y sea*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M) \\ (\xi, \eta) &\mapsto \nabla_\xi(\eta) - \nabla_\eta(\xi) - [\xi, \eta] \end{aligned}$$

su torsión. Probar que T es $\mathcal{F}(M)$-bilineal, y por lo tanto define un tensor de tipo $(1, 2)$.

Ejercicio 0.2. *Probar que:*

(i) Una combinación lineal $\sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla^i$, donde los ∇^i son conexiones y $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, es una conexión.

(ii) La diferencia entre dos conexiones es un tensor.

Ejercicio 0.3. *Probar que si (U, ϕ) es una carta de M, entonces la asignación*

$$(\xi, (\sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i)) \mapsto \sum_{i=1}^n \xi(\alpha_i)\partial_i$$

define una conexión en U.

Ejercicio 0.4. *Probar que si ∇ es una conexión en M con torsión T, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T$ es una conexión simétrica. Encontrar sus símbolos de Christoffel en función de los de ∇.*

Ejercicio 0.5. *Encontrar una métrica de tipo $(1, 1)$ sobre el toro.*

Ejercicio 0.6. *(i) Consideramos g en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, la métrica inducida de $\mathbb{R}^3$. Sea (U, ϕ) es la carta tal que*

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) &\to S^2 \\ (\theta, \alpha) &\mapsto (\sin(\theta)\cos(\alpha), \sec(\theta)\cos(\alpha), \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Encontrar la expresión local de la métrica g en la carta (U, ϕ). Expresar el elemento de volumen en la misma carta (es decir una 2-forma ω tal que $\omega(p)(v_1, v_2) = \pm 1$ si $\{v_1, v_2\}$ es base ortonormal de $T_p(M)$.

*(ii) Sea $\mathcal{H} = \{(x, y) : y > 0\}$ (**semiplano de Poincaré**). Con respecto a la carta usual $(\mathcal{H}, \mathrm{id})$ consideramos la métrica $g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$. Expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.*

(iii) Calcular la conexión de Levi-Civita para la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada, con respecto a la carta usual, por $g_{ii} = 1$ si $1 \leq i \leq n$ y $g_{n+1,n+1} = -1$. (Ver que el teorema de Levi-Civita se puede extender a métricas pseudo-riemannianas.)

Ejercicio 0.7. *Sea M una subvariedad de codimensión 1 de $\mathbb{R}^n$. Sea g la métrica canónica en $\mathbb{R}^n$, sea g_M el pull-back de la métrica g en M y sea ∇ la conexión asociada a g_M. Probar que para campos $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, $\nabla_\xi(\eta)$ coincide con la proyección ortogonal sobre TM de la derivada de $di \circ \eta$ en la dirección $di \circ \xi$, donde $i : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión.*

Ejercicio 0.8. *Sea G un grupo que actúa sobre la variedad M de manera propiamente discontinua. Supongamos que en M se tiene una métrica g.*

(i) Definir el concepto de "métrica G-invariante".

(ii) Probar que si g es G-invariante entonces la variedad M/G hereda una métrica de M, i.e., tiene una métrica con la que la proyección $M \to M/G$ es un morfismo de variedades de Riemann.

(iii) *Probar que si G es finito, $\bar{g}$ definida por*

$$\bar{g} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} d^*(\rho_h)(g)$$

es invariante (se nota por ρ_h la acción de $h \in G$ sobre X).

- *¿Qué sucede en el punto anterior si se tiene una métrica de tipo (r, s)?*

Ejercicio 0.9. *Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ hereda una métrica de S^n.*

Ejercicio 0.10. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y ∇ una conexión en M. Si $\alpha : J \to M$ es una curva diferenciable, $t_0 \in J$ y $v_1, \ldots, v_n$ es base de $T_{\alpha(t_0)}(M)$, sean $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{X}_\alpha^{\|}$ (campos paralelos a lo largo de α) de modo tal que $\xi_i(t_0) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

(i) *Ver que $\mathcal{X}_\alpha^{\|}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

(ii) *$\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ son linealmente independientes en $T_{\alpha(t)}(M)$, $\forall\, t \in J$.*

(iii) *Si $\eta \in \mathcal{X}_\alpha^{\|}$ es tal que $\eta(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, entonces $\eta(t) = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i(t)$. Deducir la dimensión de $\mathcal{X}_\alpha^{\|}$.*

Ejercicio 0.11. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana con conexión ∇ compatible con la métrica. Probar que si α es una curva en M y $\xi, \eta \in \mathcal{X}_\alpha^{\|}$ entonces las normas de ξ y η se mantienen constantes y el ángulo entre ξ y η también.*

Ejercicio 0.12. *Sea M una variedad y ∇ una conexión. Si $\xi \in \mathcal{X}(M)$, probar que son equivalentes:*

(i) *$\nabla_\xi(\xi) = 0$ (en este caso decimos que ξ es **paralelo**).*

(ii) *Toda curva integral $\alpha : J \subset \mathbb{R} \to M$ de ξ es una geodésica.*

Ejercicio 0.13. *Escribir la ecuación de geodésica en términos de los símbolos de Christoffel. Mostrar que las geodésicas en $\mathbb{R}^n$ son las rectas, y que las geodésicas en el semiplano de Poincaré son o bien rectas verticales, o bien semicírculos con centro en el eje x.*

Ejercicio 0.14. *Mostrar que la ecuación de geodésica depende sólo de la parte simétrica de la conexión. Es decir, si ∇ es una conexión y T es un tensor antisimétrico, entonces ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + T$ tienen las mismas geodésicas.*

Figure 1: Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 de septiembre de 1826, Breselenz, Hanover - 20 de julio de 1866, Selasca). Trabajó en diversos campos de la matemática, como el análisis complejo de una variable, la teoría de funciones abelianas y la geometría diferencial en sus primeros estadíos. Siguiendo las líneas de Gauss, publica en 1854 el trabajo "Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" sobre las hipótesis fundamentales de la geometría, donde estudia ejemplos de geometrías no euclideanas.