Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre, 2007

Lista de ejercicios prácticos N° 5
Integración en variedades y teorema de Stokes

Ejercicio 0.1. *Sea M una variedad compacta orientable de dimensión n y ω un elemento de volumen. Probar que $\omega \neq d\eta$ para todo $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$.*

Ejercicio 0.2. *Sean M y N variedades orientables de dimensión n y $f : M \to N$ un difeomorfismo que preserva la orientación. Suponiendo que $\omega \in \Omega^n(N)$ tiene soporte compacto, probar que entonces $f^*(\omega)$ también tiene soporte compacto y vale:*

$$\int_N \omega = \int_M f^*(\omega).$$

Sea $n \geq 2$ y consideremos a $\mathbb{R}^n$ con la estructura diferenciable usual. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ se denomina una **subvariedad con borde** de dimensión k ($2 \leq k \leq n$) de $\mathbb{R}^n$ si M es una variedad con borde de dimensión k y la inclusión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es una sumersión.

Ejercicio 0.3. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con borde de dimensión k. Verificar que ∂M es una subvariedad (sin borde) de dimensión $k-1$.*

Ejercicio 0.4. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde de dimensión n y sea $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ el elemento de volumen usual de $\mathbb{R}^n$. Si $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es la inclusión, verificar que $dV_M = i^*(\omega) \in \Omega^n(M)$ es un elemento de volumen para M. El mismo se denomina el* ***elemento de volumen usual*** *para M y la orientación que induce se llama la* ***orientación usual*** *de M.*

Ejercicio 0.5. *Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una subvariedad compacta con borde de dimensión 2. Sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene a M y $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ diferenciables.*

Interpretar (notación) y verificar el ***teorema de Green****:*

$$\int_{\partial M} F_1.dx^1 + F_2.dx^2 = \int_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial x^2}\right).dx^1 \wedge dx^2.$$

Ejercicio 0.6. *Para $p \in \mathbb{R}^n$, sea $\langle \, , \rangle : T_p(\mathbb{R}^n) \times T_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ el producto interno definido por*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n a^j b^j,$$

si $v = \sum_{j=1}^n a^j \partial_j|_p$ y $w = \sum_{j=1}^n b^j \partial_j|_p$.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde e $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Para $p \in M$, definimos el producto interno $\langle \, , \rangle_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ de la forma

$$\langle v, w \rangle_p = \langle di(p)(v), di(p)(w) \rangle.$$

(i) Dados $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, se define la aplicación

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle : M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle \xi(p), \eta(p) \rangle_p. \end{aligned}$$

Demostrar que $\langle \xi, \eta \rangle \in \mathcal{F}(M)$.

(ii) Probar que la aplicación $\langle \, , \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ definida en (i) es un tensor. El mismo se denomina la ***métrica de M inducida*** *por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$.*

Ejercicio 0.7. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde de dimensión k, con $k \geq 2$ si M tiene borde y con $k \geq 1$ si no lo tiene. Se supone M orientable y sea λ una orientación para M. Si $\omega \in \Omega^k(M)$ es un elemento de volumen, probar:*

(i) Sea $p \in M$ y sean $\{e_1, \ldots, e_k\}, \{e'_1, \ldots, e'_k\}$ dos bases ortonormales de $T_p(M)$ (respecto de $\langle\, , \rangle_p$) orientadas positivamente, es decir, $[e_1, \ldots, e_k] = [e'_1, \ldots, e'_k] = \lambda(p)$. Entonces $\omega(p)(e_1, \ldots, e_k) = \omega(p)(e'_1, \ldots, e'_k)$.

(ii) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \omega(p)(e_1, \ldots, e_k)$, donde $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es una base ortonormal de $T_p(M)$, orientada positivamente. Entonces $f \in \mathcal{F}(M)$.

- *Sea $\theta \in \Omega^k(M)$ definida por $\theta = (1/f).\omega$. Entonces θ es el único elemento de volumen para M que satisface $\theta(p)(e_1, \ldots, e_k) = 1$, cualquiera sea $p \in M$ y $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base ortonormal de $T_p(M)$ orientada positivamente.*
- *Si $k = n$ entonces $\theta = dV_M$, si λ es la orientación usual (ejercicio 4).*
- *Si $k = n-1$, existe una única función diferenciable $\bar{n} : M \to T(\mathbb{R}^n)$ que, en cada $p \in M$, satisface:*
  1. *$\bar{n}(p) \in T_p(\mathbb{R}^n)$.*
  2. *$\langle \bar{n}(p), v\rangle = 0$ si $v \in di(p)(T_p(M))$.*
  3. *$\langle \bar{n}(p), \bar{n}(p)\rangle = 1$.*
  4. *Si $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es una base de $T_p(M)$ orientada positivamente, entonces*
  $$\{\bar{n}(p), di(p)(e_1), \ldots, di(p)(e_{n-1})\}$$
  es una base orientada positivamente de $T_p(\mathbb{R}^n)$ (orientación usual).

  ***Sugerencia:** Sea $p \in M$ y $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ una base ortonormal de $T_p(M)$ orientada positivamente. Considerar la aplicación lineal $T(p) : T_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida por*
  $$T(p)(v) = (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(p)(v, di(p)(e_1), \ldots, di(p)(e_{n-1})).$$
  Es decir,
  $$T(p)(v) = \det \begin{pmatrix} v^1 & \ldots & v^n \\ e_1(x^1 \circ i) & \ldots & e_1(x^n \circ i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n-1}(x^1 \circ i) & \ldots & e_{n-1}(x^n \circ i) \end{pmatrix}$$
  si $v = \sum_{j=1}^n v^j \partial_j|_p$.
  Verificar que $T(p)$ no depende de la base ortonormal (orientada positivamente) elegida y además que $T(p) \neq 0$.
  Sea $\eta(p) \in T_p(\mathbb{R}^n)$ el único que satisface $T(p)(v) = \langle \eta(p), v\rangle$ para todo $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$. Mostrar que $\eta : M \to T(\mathbb{R}^n)$ es diferenciable y definir $\bar{n} : M \to T(\mathbb{R}^n)$ por
  $$\bar{n}(p) = \frac{\eta(p)}{\langle \eta(p), \eta(p)\rangle^{1/2}}.$$

Con las hipótesis y notaciones del ejercicio anterior, la k-forma construida en (c), que denotamos con $\theta = dV_M$, se denomina el **elemento de volumen inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$ y la orientación** λ.
Si $k = 1$ (respectivamente $k = 2$), dV_M se denomina el **elemento de arco** (respectivamente **elemento de área**).
La función $\bar{n} : M \to T(\mathbb{R}^n)$ construida en (e) se denomina la **normal exterior a M asociada a** λ.

Ejercicio 0.8. *Con las hipótesis del ejercicio anterior para $k = n-1$, sea $p \in M$ y $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de $T_p(M)$. Verificar que:*
$$dV_M(p)(v_1, \ldots, v_{n-1}) = (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(p)(\bar{n}(p), di(p)(v_1), \ldots, di(p)(v_{n-1})).$$

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) un abierto no vacío y $\xi = \sum_{i=1}^n F^i \partial_i \in \mathcal{X}(D)$. La **divergencia** de ξ se define como
$$\operatorname{div}(\xi) = \sum_{i=1}^n \partial_i(F^i) \in \mathcal{F}(D).$$

Si $n = 3$, el **rotor** de ξ se define como
$$\operatorname{rot}(\xi) = (\partial_2(F^3) - \partial_3(F^2))\partial_3 + (\partial_3(F^1) - \partial_1(F^3))\partial_2 + (\partial_1(F^2) - \partial_2(F^1))\partial_3.$$

Ejercicio 0.9. *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una subvariedad compacta con borde de dimensión m y sean $i : \partial M \hookrightarrow M$, $j : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ las inclusiones. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto que contiene a M y $\xi \in \mathcal{X}(D)$ con $\xi = \sum_{i=1}^{3} F^i \partial_i$.*

(i) Si $m = 3$, sea λ la orientación usual de M y $dV = dV_M$ el elemento de volumen usual. Sea $\bar{n} : \partial M \to T(\mathbb{R}^3)$ la normal exterior a ∂M asociada a $\partial\lambda$ y $dA = dV_{\partial M}$ el elemento de volumen (área) de ∂M inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ y la orientación $\partial\lambda$.

Sea $\theta \in \Omega^2(D)$ definida por

$$\theta = F^1.dx^2 \wedge dx^3 + F^2.dx^3 \wedge dx^1 + F^3.dx^1 \wedge dx^2$$

y $\omega = j^*(\theta) \in \Omega^2(M)$.

Utilizando el ejercicio anterior, verificar que $i^*(\omega) = \langle \xi, \bar{n} \rangle.dA$.

*(ii) En la situación de (i), verificar el **teorema de la divergencia**:*

$$\int_{\partial M} \langle \xi, \bar{n} \rangle.dA = \int_M \operatorname{div}(\xi).dV.$$

(iii) Si $m = 2$, sea λ una orientación para M y $dA = dV_M$ el elemento de volumen (área) de M inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ y la orientación $\partial\lambda$. Sea $\bar{n} : M \to T(\mathbb{R}^3)$ la normal exterior a M asociada a λ y $dS = dV_{\partial M} \in \Omega^1(\partial M)$ el elemento de volumen (arco) inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$ y la orientación $\partial\lambda$.

1. *Mostrar que existe un único $\eta \in \mathcal{X}(\partial M)$ que satisface $dS(p)(\eta(p)) = 1$ para todo $p \in \partial M$.*
2. *Sea $\theta \in \Omega^1(D)$ la 1-forma definida por $\theta = F^1.dx^1 + F^2.dx^2 + F^3.dx^3$ y $\omega = j^*(\theta) \in \Omega^1(M)$. Utilizando el ejercicio anterior, verificar que*

$$d\omega = \langle \operatorname{rot}(\xi), \bar{n} \rangle.A.$$

*(iv) En la situación de (iii), sea $T : \partial M \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(p) = d(j \circ i)(p)(\eta(p))$ si $p \in \partial M$. Verificar el **teorema del rotor**:*

$$\int_{\partial M} \langle \xi, T \rangle dS = \int_M \langle \operatorname{rot}(\xi), \bar{n} \rangle.dA.$$

Ejercicio 0.10. *Enunciar y probar el teorema de la divergencia para $M \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.*

Figure 1: Sir George Gabriel Stokes, 1er Baronet (13 de agosto de 1819, Skreen - 1 de febrero de 1903, Cambridge). Trabajó en diversos campos de la física y la matemática, como la mecánica de fluidos (incluyendo las ecuaciones de Navier-Stokes), la óptica y los pasos iniciales del cálculo vectorial (como el teorema de Stokes). Fue presidente de la Royal Society.