Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre, 2007

Lista de ejercicios prácticos N° 4
Álgebra Multilineal, formas diferenciales y orientabilidad

1 Álgebra multilineal

En esta sección V denotará un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita n. Para $k \geq 1$, $V^k = V \times \cdots \times V$ (k factores) y $V^0 = \mathbb{R}$. Si $(r, s) \neq (0, 0)$, $T^r_s(V)$ denotará el espacio vectorial de las funciones multilineales de $(V^*)^r \times V^s$ en $\mathbb{R}$ y si $(r, s) = (0, 0)$, $T^0_0(V) = \mathbb{R}$. De la misma manera, $V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$ (k factores) y $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$. Para $(r, s) \neq (0, 0)$, sea $V_{r,s} = V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$, $V_{0,0} = \mathbb{R}$. $\mathbb{S}_k$ denotará el grupo simétrico de k elementos.

Ejercicio 1.1. *Probar que $T^r_s(V)$ es isomorfo a $V_{r,s}$.*

Ejercicio 1.2. *Se define*

$$E(V) = \bigoplus_{r,s\geq 0} V_{r,s}.$$

Si $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_1} \otimes v^*_1 \otimes \cdots \otimes v^*_{s_1} \in V_{r_1,s_1}$ y $w = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r_2} \otimes w^*_1 \otimes \cdots \otimes w^*_{s_2} \in V_{r_2,s_2}$, definimos

$$v \otimes w = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{r_1} \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r_2} \otimes v^*_1 \otimes \cdots \otimes v^*_{s_1} \otimes w^*_1 \otimes \cdots \otimes w^*_{s_2} \in V_{r_1+r_2,s_1+s_2}.$$

Probar que $E(V)$ es un $\mathbb{R}$-álgebra asociativa (no conmutativa) con este producto, y que se corresponde (vía el isomorfismo del ejercicio anterior) con el producto tensorial visto en la clase teórica.

Ejercicio 1.3. *Sea $k \geq 2$, y tomemos $\mathfrak{a}_k$ el subespacio de $V^{\otimes k}$ generado por los elementos de la forma*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k,$$

donde $v_i = v_j$ para algún $i \neq j$. Se define $\Lambda^k(V) = V^{\otimes k}/\mathfrak{a}_k$, $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ y $\Lambda^1(V) = V$. Notar con $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ a la clase de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ en $\Lambda^k(V)$. Probar que:

(i) $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$ *si* $v_1, \ldots, v_k$ *son linealmente dependientes.*

(ii) *Si* $\sigma \in \mathbb{S}_k$ *entonces* $v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} = \epsilon(\sigma) v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.

(iii) $\Lambda^k(V) = 0$ *si* $k > \dim_{\mathbb{R}}(V)$.

(iv) *Si* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base (ordenada) de* V*, entonces la colección de los elementos de la forma* $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$ *con* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ *resulta una base de* $\Lambda^k(V)$*. Concluir que* $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$*, para* $k = 0, \ldots, n$.

Ejercicio 1.4. *Se define el **álgebra tensorial** de V como la subálgebra de $E(V)$ dada por*

$$T(V) = \bigoplus_{k\geq 0} V^{\otimes k},$$

*y el **álgebra exterior** de V como*

$$\Lambda(V) = \sum_{k\geq 0} \Lambda^k(V).$$

Notar que el producto de $E(V)$ induce un producto en $T(V)$ y en $\Lambda(V)$. Probar que si $v \in \Lambda^k(V)$ y $w \in \Lambda^l(V)$ entonces $v \wedge w = (-1)^{kl} w \wedge v$.

Ejercicio 1.5. *Sea*

$$\begin{aligned} \varphi : V^k &\to \Lambda^k(V) \\ (v_1, \ldots, v_k) &\mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_k. \end{aligned}$$

Probar que φ es multilineal y alternada, y que tiene la propiedad universal siguiente: dada cualquier $\psi : V^k \to T$ multilineal y alternada, existe una única $\widetilde{\psi} : \Lambda^k(V) \to T$ lineal tal que $\widetilde{\psi} \circ \varphi = \psi$, i.e., el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} & T \\ V^k \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & \Lambda^k(V) \arrow[uu, dashed, "\exists!\widetilde{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si llamamos $A_k(V)$ al subespacio de $T^0_k(V)$ formado por las funciones multilineales y alternadas de V en $\mathbb{R}$, deducir que $A_k(V) \simeq \Lambda^k(V)^*$.

Ejercicio 1.6. *Sea la forma bilineal*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V) &\to \mathbb{R} \\ (v^*, u) &\mapsto \det(v_i^*(u_j)), \end{aligned}$$

donde $v^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^*$ y $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$. Probar que es no degenerada y por lo tanto induce un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\Lambda^k(V)^*$ y $\Lambda^k(V^*)$.

Ejercicio 1.7. *Deducir de los dos ejercicios anteriores que $A_k(V) \simeq \Lambda^k(V^*)$.*

Ejercicio 1.8. *Sea*

$$A(V) = \bigoplus_{k \geq 0} A_k(V)$$

*el **álgebra de funciones multilineales alternadas** de V (donde $A_0(V) = \mathbb{R}$). Por el isomorfismo del ejercicio anterior, está definido un producto $\wedge$ en $A(V)$. Probar que si $f \in A_k(V)$ y $g \in A_l(V)$ entonces $f \wedge g \in A_{k+l}(V)$ está dado por*

$$(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k,l}} \epsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}),$$

donde $\mathbb{S}_{k,l} = \{\sigma \in \mathbb{S}_{k+l} : \sigma(1) < \cdots < \sigma(k) \, y \, \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)\}$. Probar que este producto es el mismo que se definió en la clase teórica.

Ejercicio 1.9. *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Definir $\det(f)$ sin apelar a ninguna base de V. Probar que si g es otro endomorfismo, $\det(fg) = \det(f). \det(g)$. (**Sugerencia**: considerar $\Lambda^n(V)$).*

2 Formas diferenciales

En esta sección, dada una carta (U, ϕ) de una variedad M de dimensión n, si ω es una k-forma diferencial de M, es decir, una sección del fibrado $\bigwedge^k T^*M$, y consideramos la carta usual $(\bigwedge^k T^*U, \bigwedge^k \tau_\phi^*)$ en $\bigwedge^k T^*M$, la expresión de ω en esas coordenadas resulta de la forma

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \bigwedge\nolimits^k \tau_\phi^* \circ \omega \circ \phi^{-1} : \phi(U) &\to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* \\ p &\mapsto \sum_i f_i(p) \lambda_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}, \end{aligned}$$

donde $\lambda_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección canónica. Es más usual emplear la notación (sin explicitar la carta)

$$\omega(p) = \sum_i f_i(p) dx_p^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_p^{i_k},$$

donde se omite por brevedad las cartas en el miembro izquierdo, o donde se considera a $dx_p^i \in T_p(M)^*$ como la única funcional lineal que satisface que $dx_p^i(\partial_j|_p) = \delta_{ij}$.

Ejercicio 2.1. *Sea M una variedad, ω una 1-forma. Sean (U,ϕ), (V,ψ) dos cartas alrededor de un punto $p \in M$. Sean*

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_p^i$$

y

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i dy_p^i,$$

las expresiones de la forma ω en las cartas (U,ϕ) y (V,ψ) respectivamente. Encontrar la relación entre los α_i y los β_i.

Ejercicio 2.2. *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, y*

$$\begin{aligned} df : M &\to T^*(M) \\ p &\mapsto (v \mapsto v(f)), \end{aligned}$$

donde $v \in T_p(M)$. Mostrar que en una carta (U,ϕ), df se escribe de la forma

$$df = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(f) dx^i,$$

y por lo tanto df es una sección diferenciable, es decir, una 1-forma.

Ejercicio 2.3. *Sea $\eta \in \Omega^1(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Mostrar que $f.\eta \in \Omega^1(\mathbb{R})$. Mostrar que si $g \in \mathcal{F}(M)$ entonces $d(fg) = fdg + gdf$.*

Ejercicio 2.4. *Sea $M = \mathbb{R}^n$ (en cada punto su tangente es $\mathbb{R}^n$, con su producto interno usual) y sea $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Definimos*

$$\begin{aligned} \langle \xi, - \rangle : M &\to T^*M \\ p &\mapsto (v \mapsto \langle \xi(p), v \rangle). \end{aligned}$$

Mostrar que $\langle \xi, - \rangle$ es una 1-forma y que toda 1-forma se obtiene de esta manera.

Ejercicio 2.5. *Sea ω es una k-forma. ¿Es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Y si $\dim(M) = 3$?*

Ejercicio 2.6. *Si (U,ϕ) es una carta de la variedad M, sea $\omega_\phi \in \Omega^n(U)$ definida por $\omega_\phi = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Llamaremos a ω_ϕ la n-forma asociada a la carta (U,ϕ).*

(i) Verificar que

$$\omega_\phi(p)(\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p) = 1,$$

para todo $p \in U$.

(ii) Sea (V,ψ) otra carta de M tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Probar que $\omega_\psi(p) = J_{\psi\circ\phi^{-1}}(p)\omega_\phi(p)$ para todo $p \in U \cap V$, donde como es usual $J_{\psi\circ\phi^{-1}}$ indica el jacobiano de la aplicación $\psi \circ \phi^{-1}$.

Ejercicio 2.7. *Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$, $v \in T_p(M)$ y $\lambda \in T_p(M)^*$. Probar que existen $\xi \in \mathcal{X}(M)$ y $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$ tales que $\xi(p) = v$ y $\omega(p) = \lambda$.*

Ejercicio 2.8. *Sea M una variedad diferenciable, W un abierto no vacío de M, $\xi \in \mathcal{X}(W)$, $\omega \in \mathcal{X}^*(W)$ y $p \in W$. Probar que:*

(i) Existe un abierto U de M con $p \in U \subset W$ y un campo $\eta \in \mathcal{X}(M)$ tales que $\eta|_U = \xi|_U$.

(ii) Existe un abierto V de M con $p \in V \subset W$ y una 1-forma $\lambda \in \mathcal{X}^*(M)$ tal que $\lambda|_V = \omega|_V$.

Ejercicio 2.9. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Se define el morfismo*

$$\begin{aligned} i_\xi : \Omega^k(M) &\to \Omega^{k-1}(M) \\ \omega &\mapsto i_\xi(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(p)(\xi(p), v_1, \ldots, v_{k-1}), \end{aligned}$$

donde consideramos a ω como un campo de aplicaciones multilineales alternadas. Para 0-formas definimos $i_\xi(f) = 0$.

Sea (U, ϕ) una carta alrededor de p. A partir de las expresiones

$$\xi|_U = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i$$
$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} b_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

de ξ y ω en coordenadas locales, respectivamente, escribir en coordenadas locales $i_\xi(\omega)$.

Ejercicio 2.10. *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre dos variedades. Sea $f^* : \mathcal{X}_k^0(N) \to \mathcal{X}_k^0(M)$ la adjunta de f, es decir, si $k = 0$, $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. Para $k \geq 1$, si $T \in \mathcal{X}_k^0(N)$ es un campo de covectores de grado k, al que identificamos, para cada $q \in N$, con un campo de aplicaciones multilineales $T_q(N) \times \cdots \times T_q(N) \to \mathbb{R}$, entonces*

$$f^*(T) = f^*(T)(p)(v_1, \ldots, v_k) = T(f(p))(df(p)(v_1), \ldots, df(p)(v_k)),$$

para $p \in M$.

Si (U, ϕ) es una carta de M alrededor de p, (V, ψ) es una carta de N alrededor de $q = f(p)$, $f(U) \subset V$ y T se escribe localmente como

$$T|_V = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k} dy^{i_1} \otimes \cdots \otimes dy^{i_k},$$

escribir localmente $f^*(T)$ en la carta (U, ϕ). Probar que si T es alternado también lo es $f^*(T)$.

Ejercicio 2.11. *Sea $f : N \to M$ una aplicación diferenciable. Probar que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $f^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$.

(ii) $f^*(g.\omega) = (g \circ f).f^*(\omega)$ *si* $g \in \mathcal{F}(M)$.

(iii) $f^*(\omega \wedge \lambda) = f^*(\omega) \wedge f^*(\lambda)$.

Ejercicio 2.12. *Sea M una variedad diferenciable, (U, ϕ) una carta y $\omega \in \Omega^k(M)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U, ϕ) para los casos $0 \leq k \leq 2$.*

Ejercicio 2.13. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ la diferencial exterior. Probar:*

(i) Si $f \in \mathcal{F}(M)$ entonces $df \in \Omega^1(M) = \mathcal{X}_1^0(M)$ es la diferencial usual.

(ii) Sea (U, ϕ) una carta de M. Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Entonces

$$d\omega_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

(iii) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

(iv) $d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda$, *si* $\omega \in \Omega^k(M)$.

(v) $d^2(\omega) = 0$.

(vi) Si $f : M \to N$ es diferenciable entonces $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$ para toda $\omega \in \Omega^k(N)$ con $k \geq 0$.

Ejercicio 2.14. *Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable ("clásico").*

(i) Demostrar que $\omega_{F^1}(x)(v) = \langle F(x), v \rangle$ define una 1-forma en $\mathbb{R}^3$. Encontrar las coordenadas de ω_{F^1} en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, si ω es una 1-forma en $\mathbb{R}^3$, probar que ω determina un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_{G^1} = \omega$.

(ii) Demostrar ahora que $\omega_{F^2}(x)(u, v) = \langle F(x), u \times v \rangle$ define una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en $\mathbb{R}^3$ tal que $\omega_{G^2} = \omega$.

(iii) *Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre*

1. *df y ∇f.*
2. *$\operatorname{rot} F$ y $d\omega_{F^1}$.*
3. *$\operatorname{div} F$ y $d\omega_{F^2}$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx \wedge dy \wedge dz$).*

Concluir, usando la relación $d \circ d = 0$, las fórmulas clásicas $\operatorname{rot} \nabla \equiv 0$ y $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$.

Ejercicio 2.15. *Sea $M = \mathbb{R}^4$, denotando a sus puntos con letras (t, x, y, z). Escribir explícitamente las formulas para d en la base de las formas dada por $\{dt, dx, dy, dz\}$, $\{dt \wedge dx, dt \wedge dy, dt \wedge dz, dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$, $\{dt \wedge dy \wedge dz, dt \wedge dz \wedge dx, dt \wedge dx \wedge dy, dx \wedge dy \wedge dz\}$, $\{dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz\}$. Buscar en algun libro de electromagnetismo las ecuaciones de Maxwell y comparar.*

Ejercicio 2.16. *Sean U y V abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to V$ diferenciable. Probar:*

(i)
$$f^*(du^i) = df^i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial u^k} du^k.$$

(ii)
$$f^*(g.du^1 \wedge \cdots \wedge du^n) = (g \circ f). \det(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}).du^1 \wedge \cdots \wedge du^n,$$

para toda $g \in \mathcal{F}(V)$.

Ejercicio 2.17. *Sea M una variedad diferenciable y sea $\omega \in \Omega^k(M)$. Diremos que ω es una k-forma **cerrada** si $d\omega = 0$ y que es una k-forma **exacta** si existe $\lambda \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\lambda = \omega$. Probar que:*

(i) *Toda forma exacta es cerrada.*

(ii) *Si ω, ω' son formas cerradas y ω'' es exacta, entonces $\omega \wedge \omega'$ es cerrada y $\omega \wedge \omega''$ es exacta.*

(iii) *Si $f : M \to N$ es diferenciable, entonces f^* transforma formas cerradas en cerradas y exactas en exactas.*

Ejercicio 2.18 (Derivada de Lie). *Si $A \in \mathcal{X}_l^k(N)$ es un campo tensorial de tipo (k, l) sobre N y $h : M \to N$ es un difeomorfismo, definimos $h^*(A) \in \mathcal{X}_l^k(M)$ sobre M de la siguiente manera: si $v_1^*, \ldots, v_k^* \in T_p(M)^*$ y $v_1, \ldots, v_l \in T_p(M)$ entonces*

$$\begin{gathered}[h^*(A)(p)]\,(v_1^*, \ldots, v_k^*, v_1, \ldots, v_l) \\ = A(\phi(p))(v_1^* \circ d(h^{-1})(h(p)), \ldots, v_k^* \circ d(h^{-1})(h(p)), dh(p)(v_1), \ldots, dh(p)(v_k)).\end{gathered}$$

(i) *Verifique que si $k = 0$, la definición coincide con la del ejercicio 19.*

(ii) *Si el campo vectorial ξ sobre M tiene a α como flujo y A es un tensor de tipo (k, l) sobre M, definimos la **derivada de Lie** de A en la dirección de ξ como*
$$\mathcal{L}_\xi(A)(p) = \lim_{h \to 0} \frac{(\alpha_h^*)(A)(p) - A(p)}{h}.$$
Probar que en el caso en que A sea un campo vectorial, la definición es la misma que la vista anteriormente. Demuestre que

1.
$$\mathcal{L}_\xi(A + B) = \mathcal{L}_\xi(A) + \mathcal{L}_\xi(B),$$

2.
$$\mathcal{L}_\xi(A \otimes B) = \mathcal{L}_X(A) \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_\xi(B),$$

3.
$$\mathcal{L}_\xi(fA) = \xi(f)A + f\mathcal{L}_\xi(A).$$

(iii) *Si A tiene componentes $A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}$ en un sistema coordanado dado y $\xi = \sum_{i=1}^n a^i\partial_i$, demuestre que las coordenadas de $\mathcal{L}_\xi(A)$ están dadas por*

$$(\mathcal{L}_\xi(A))^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l}}{\partial x^i} - \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^n A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_{m+1},\ldots,j_l} \frac{\partial a^{j_m}}{\partial x^j} + \sum_{m=1}^l \sum_{i=1}^n A^{i_1,\ldots,i_{m-1},i,i_{m+1},\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_l} \frac{\partial a^i}{\partial x^{i_m}}.$$

Ejercicio 2.19 (Derivada de Lie de formas). . *Sea ξ un campo. Si ω y λ son formas, probar que:*

(i) $\mathcal{L}_\xi(\omega \wedge \lambda) = \mathcal{L}_\xi(\omega) \wedge \lambda + \omega \wedge \mathcal{L}_\xi(\lambda)$.

(ii) $\mathcal{L}_\xi(d\omega) = d(\mathcal{L}_\xi(\omega))$.

(iii) $\mathcal{L}_\xi(f) = \xi(f)$ *si* $f \in \mathcal{F}(M)$.

Demuestre que estas propiedades determinan unívocamente a $\mathcal{L}_\xi$. Utilize este hecho para dar una definición "algebraica" de $\mathcal{L}_\xi$. Muestre que

$$\mathcal{L}_\xi \circ \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \circ \mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]}.$$

Halle la expresión en coordenadas locales.

Ejercicio 2.20. *Recordar que $i_\xi(\omega) = \omega(\xi, -)$ si $\omega \in \Omega^k(M)$ con $k > 0$ e $i_\xi(f) = 0$ para $f \in \mathcal{F}(M)$. Muestre las siguientes identidades, para ξ y η campos, y f función diferenciable:*

1. $i_\xi \circ i_\eta = -i_\eta \circ i_\xi$.
2. $i_{f\xi} = f i_\xi$.
3. $i_\xi \circ d + d \circ i_\xi = \mathcal{L}_\xi$.
4. $\mathcal{L}_{f\xi} = f\mathcal{L}_\xi + df \wedge i_\xi$.
5. $\mathcal{L}_\xi \circ i_\eta - i_\eta \circ \mathcal{L}_\xi = i_{[\xi,\eta]}$. *(Sugerencia: ver que esta fórmula es válida aplicada a una f, también es válida aplicada a df, y finalmente ver que*

$$(\mathcal{L}_\xi \circ i_\eta - i_\eta \mathcal{L}_\xi)(\omega \wedge \lambda) = (\mathcal{L}_\xi \circ i_\eta - i_\eta \circ \mathcal{L}_\xi)(\omega) \wedge \lambda + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge (\mathcal{L}_\xi \circ i_\eta - i_\eta \circ \mathcal{L}_\xi)(\lambda)$$

para deducir la fórmula general por induccion en $|\omega|$).

3 Orientabilidad de variedades

Ejercicio 3.1. *Sea M una variedad y TM su fibrado tangente. Probar que TM es orientable.*

Ejercicio 3.2. *Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{D} = \{(U, \phi), (V, \psi)\}$ donde $U \cap V$ es conexo, entonces M es orientable.*

Ejercicio 3.3. *Ver que si M es paralelizable, es orientable.*

Ejercicio 3.4. *Sea M y N variedades diferenciables. Probar que son equivalentes:*

(i) M *y* N *son orientables.*

(ii) $M \times N$ *es orientable.*

Ejercicio 3.5. *Probar que la esfera S^n y $\mathbb{R}^n$ son orientables. Probar que el n-toro T^n y el cilindro son orientables.*

Ejercicio 3.6. *Sea M una variedad orientable conexa y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Si $\mathcal{D}$ es un atlas orientado compatible con la orientación, probar que para dos cartas $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{D}$ $(i = 1, 2)$ el signo de $J(\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1})$ es constante (donde está definida la composición). Interpretar.*

Ejercicio 3.7. *Sea M una variedad diferenciable. Suponga que $(TM)|_A$ es trivial para todo $A \subset M$ homeomorfo a S^1. Demuestre que M es orientable.*

Figure 1: Georges de Rham (10 de septiembre de 1903, Roche VD, Vaud-9 de octubre de 1990, Lausanne). Su principal contribución fue el famoso teorema que lleva su nombre, probado en 1931, donde demuestra que las clases de formas cerradas modulo formas exactas son invariantes topológicos (grupos de cohomología de de Rham).