# Geometría Diferencial
# Segundo Cuatrimestre, 2007

Lista de ejercicios prácticos N° 3
Campos de vectores y Grupos de Lie

## 1 Generalidades de Campos Vectoriales

**Ejercicio 1.1.** *Sea $M$ una variedad diferenciable, $p \in M$. Si $v \in T_p(M)$, probar que existe un campo $\xi \in \mathcal{X}(M)$ tal que $\xi(p) = v$.*

**Ejercicio 1.2.** *Sea $\xi$ un campo en $M$. Consideramos la derivación*

$$\begin{aligned} \delta_\xi : \mathcal{F}(M) &\to \mathcal{F}(M), \\ f &\mapsto \xi(f) \end{aligned}$$

*donde*

$$(\xi(f))(p) = df(\xi(p)).$$

*Esto induce un morfismo $\mathbb{R}$-lineal*

$$\delta : \mathcal{X}(M) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(M))$$

*mediante $\delta(\xi)(f) = \xi(f)$.*

*Si $\eta$ es otro campo, y lo consideramos como derivación, verificar a través de un ejemplo que $\delta_\xi \circ \delta_\eta$ no es necesariamente una derivación, pero sin embargo $[\delta_\xi, \delta_\eta] = \delta_\xi \circ \delta_\eta - \delta_\eta \circ \delta_\xi$ sí lo es.*

**Ejercicio 1.3.** *Probar que los campos vectoriales sobre una variedad tienen estructura de $\mathbb{R}$-álgebra de Lie, es decir, que el corchete de Lie verifica que es antisimétrico: $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$, y se satisface la igualdad de Jacobi:*

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0, \forall\, \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(M).$$

**Ejercicio 1.4.** *Sea $M = \mathbb{R}^2$. Identificando $T_p(M)$ con $M$ de la manera natural, probar que no existe una carta $(U, \phi)$ tal que los campos $\partial_1$ y $\partial_2$ coincidan respectivamente con los campos*

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (1, 0), \\ (x, y) &\mapsto (0, y(x^2 + 1)). \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.5.** *Sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Un par de campos $\xi \in \mathcal{X}(M)$, $\eta \in \mathcal{X}(N)$ se dicen **$f$-relacionados** si $\eta(f(p)) = (df)(\xi(p))$, $\forall p \in M$, es decir, si $\eta \circ f = (df) \circ \xi$. En este caso, notaremos $\xi \sim_f \eta$.*

*(i) Probar que si $\alpha$ es una curva integral de $\xi$ entonces $f \circ \alpha$ es una curva integral de $\eta$.*

*(ii) Probar que si $\xi_i \sim_f \eta_i$ ($i = 1, 2$) entonces $[\xi_1, \xi_2] \sim_f [\eta_1, \eta_2]$.*

*(iii) Son equivalentes:*

1. *$\xi \sim_f \eta$*
2. *Para todo $U \subset N$ abierto y $g \in \mathcal{F}(U)$, $\eta(g) \circ f = \xi(g \circ f)$ en $f^{-1}(U)$.*
3. *Para toda $g \in \mathcal{F}(N)$, $\eta(g) \circ f = \xi(g \circ f)$ en $M$.*

**Ejercicio 1.6.** *Sea $\xi \in \mathcal{X}(M)$ el campo de vectores nulo, i.e., $\xi(p) = 0$ para todo $p \in M$. ¿Es completo? ¿Cuál es su grupo uniparamétrico de difeomorfismos?*

**Ejercicio 1.7.** *Sea $\xi \in \mathcal{X}(M)$ y $\alpha : (a, b) \to M$ una curva integral de $\xi$. Sea $\gamma : (c, d) \to (a, b)$ un difeomorfismo. ¿Bajo qué condiciones es $\alpha \circ \gamma$ una curva integral de $\xi$?*

**Ejercicio 1.8.** *Sea $\alpha$ una curva integral de $\xi \in \mathcal{X}(M)$ tal que $\dot{\alpha}(t_0) = 0$ para algún $t_0$ en el dominio de la curva. Probar que $\alpha$ es constante.*

**Ejercicio 1.9.** *En los siguientes casos determinar, para cada $p \in M$, la curva integral maximal $\alpha_p : J_p \to M$ de $\xi$ que satisface $\alpha_p(0) = p$. Decidir si $\xi$ es o no completo.*

*(i)* $M = \mathbb{R}^2$, $\xi(u) = u_1\partial_1|_u - u_2\partial_2|_u$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

*(ii)* $M = \mathbb{R}$, $\xi(u) = u^2\partial|_u$, $u \in \mathbb{R}$.

*(iii)* $M = \mathbb{R}^2$, $\xi(u) = u_2\partial_1|_u - u_1\partial_2|_u$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

**Ejercicio 1.10.** *Deducir del ejercicio anterior que el grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ generado por $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ está dado por*

$$\alpha(t, (a, b)) = (ae^t, be^{-t})$$

*para el campo del inciso $(i)$, y por*

$$\alpha(t, (a, b)) = (a\cos(t) + b\sin(t), -a\sin(t) + b\cos(t))$$

*para el campo del inciso $(iii)$.*

**Ejercicio 1.11.** *Sea $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ dado por $\xi(u) = u_1^2\partial_1|_u + u_3\partial_2|_u - u_2\partial_3|_u$.*

*(i)* *Calcular su flujo y decidir si es completo.*

*(ii)* *Encontrar la curva integral de $\xi$ que pasa por $(0, 1, 0)$ en el instante $t = 0$.*

**Ejercicio 1.12.** *En cada uno de los siguientes casos calcular el grupo uniparamétrico generado por el campo $\xi \in \mathcal{X}(M)$.*

*(i)* $M = \mathbb{R}^2$, $\xi(u_1, u_2) = (u_2, u_1)$ *(empleando la identificación usual $T_p(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^2$).*

*(ii)* $M = \mathbb{R}^2$, $\xi(u_1, u_2) = (u_1, -u_2)$.

*(iii)* $M = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\xi(A) = BA$, *con* $B \in M_n(\mathbb{R})$.

**Ejercicio 1.13.** *En cada uno de los siguientes casos probar que $\alpha : \mathbb{R} \times M \to M$ es un grupo uniparamétrico y calcular su generador $\xi \in \mathcal{X}(M)$.*

*(i)* $M = V$ *un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y* $\alpha(t, v) = ta + v$, *con* $a \in M$ *fijo.*

*(ii)* $M = T^2 = S^1 \times S^1$, $\alpha(t, z, w) = (e^{2it}z, e^{-it}w)$.

*(iii)* $M = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$,

$$\alpha(t, A) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A.$$

*(iv)* $M = S^1 \times \mathbb{R}$, $\alpha(t, z, x) = (z, e^t x)$.

**Ejercicio 1.14.** *Sean $N$ una variedad diferenciable de dimensión $n$, $M \subset N$ una subvariedad de $N$ de dimensión $m$ e $i : M \hookrightarrow N$ la inclusión. Sea $\xi \in \mathcal{X}(N)$ tal que $\xi(p) \in di(p)(T_p(M)) \subset T_p(N)$ para todo $p \in M$.*

*(i)* *Se define $\eta : M \to TM$ por $\eta(p) = v$, donde $v \in T_p(M)$ es el único que satisface $di(p)(v) = \xi(p)$. Probar que $\eta \in \mathcal{X}(M)$.*

*(ii)* *Deducir que $\eta \sim_i \xi$. Además, $\eta$ es el único con esta propiedad.*

*(iii)* *Para cada $p \in M$, sean $\alpha_p : J_p \to N$ la curva integral maximal de $\xi$ con $\alpha_p(0) = p$ y $\alpha'_p : J'_p \to M$ la curva integral maximal de $\eta$ con $\alpha'_p(0) = p$. Probar que $J'_p \subset J_p$ y que $\alpha'_p = (\alpha_p)|_{J_p}$.*

**Ejercicio 1.15.** *Sean $i : S^{2n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ la inclusión y el campo $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{2n})$ definido por*

$$\xi(u) = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j u_{2n-j}\partial_{j+1}|_u.$$

*(i)* *Probar que, para todo $n \geq 1$, $\xi(p) \in di(p)(T_p(S^{2n-1}))$, si $p \in S^{2n-1}$.*

*(ii)* *Sea $\eta \in \mathcal{X}(S^{2n-1})$ el único campo de vectores que satisface $\eta \sim_i \xi$. Calcular el flujo maximal $\alpha : \mathbb{R} \times S^3 \to S^3$ de $\eta$ para el caso $n = 2$.*

**Ejercicio 1.16.** *Sea $M$ una variedad diferenciable, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ completo y $\alpha$ una curva integral maximal de $\xi$. Probar que si $\alpha$ no es inyectiva entonces es periódica.*

**Ejercicio 1.17.** *Sea $M$ una variedad, $p \in M$, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ un campo, $\alpha : (a, b) \to M$ la curva integral maximal de $\xi$ tal que $\alpha(0) = p$. Si existe $t \neq 0$ tal que $\alpha(t) = p$, probar que $(a, b) = \mathbb{R}$.*

**Ejercicio 1.18.** *Si $(U, \phi)$ es una carta de $M$, calcular una curva integral del campo $\partial_1 \in \mathcal{X}(U)$.*

**Ejercicio 1.19.** *Sean $\xi, \eta \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $\xi(u) = u_2\partial_2|_u$, $\eta(u) = u_1\partial_2|_u$, donde $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Probar que $[\xi, \eta] = -\eta$.*

**Ejercicio 1.20.** *Sean $\xi, \eta \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $\xi(p) = \partial_1|_p$, $\eta(p) = \cos(p_1)\partial_1|_p + \sin(p_2)\partial_2|_p$, donde $p = (p_1, p_2)$. Sea*

$$G = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| < 1, p_2 > 0\}.$$

*Probar*

*(i)* *$\{\xi(p), \eta(p)\}$ es una base de $T_p(\mathbb{R}^2)$ para todo $p \in G$.*

*(ii)* *Para ningún $p \in G$ existe una carta $(U, \phi)$ de $\mathbb{R}^2$ con $p \in U \subset G$ tal que $\xi = \partial_1$ y $\eta = \partial_2$ sobre $U$.*

# 2 Generalidades de Grupos de Lie

**Ejercicio 2.1.** *Sea $G$ un grupo de Lie. Para $g \in G$, notamos $L_g : G \to G$ el difeomorfismo $L_g(h) = g.h$. Sea $\xi \in \mathcal{X}(G)$ un campo. Diremos que es* ***invariante a izquierda*** *si $(dL_g)(\xi(h)) = \xi(gh)$, para todo $g, h \in G$, es decir, si $(dL_g) \circ \xi = \xi \circ L_g$.*

*(i)* *Definir* ***campo invariante a derecha****.*

*(ii)* *Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto entonces coinciden en todo $G$.*

*(iii)* *Probar que combinaciones lineales de campos invariantes a izquierda son invariantes a izquierda.*

*(iv)* *Probar que si $v \in T_g(G)$, existe un único campo invariante a izquierda $\xi$ tal que $\xi(g) = v$.*

*(v)* *Deducir que hay un isomorfismo entre $T_g(G)$ y el espacio de campos invariantes a izquierda.*

*La notación usual es $\mathrm{Lie}(G) = T_e(G)$, donde $e \in G$ es el elemento neutro de $G$.*

**Ejercicio 2.2.** *Sea $G$ un grupo de Lie y $\xi \in \mathcal{X}(G)$ invariante a izquierda. Probar que $\xi \sim_{L_g} \xi$ para todo $g \in G$. Más aún, si $\xi \sim_{L_g} \xi$ para todo $g \in G$, entonces $\xi$ es invariante a izquierda.*

**Ejercicio 2.3.** *Probar que si $G$ es un grupo de Lie y $\xi$ y $\eta$ son campos invariantes a izquierda entonces $[\xi, \eta]$ es invariante a izquierda. Deducir que $\mathrm{Lie}(G)$ hereda una estructura de (sub)álgebra de Lie de $\mathcal{X}(G)$.*

**Ejercicio 2.4.** *Sea $(\mathfrak{g}, [,])$ un álgebra de Lie. Si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana. Si $\dim(\mathfrak{g}) = 2$ demuestre que, o bien $\mathfrak{g}$ es abeliana, o bien existe una base $\{x, y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[x, y] = x$.*

**Ejercicio 2.5.** *Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ y definamos $[v, w] := v \times w$. Verificar que es un álgebra de Lie.*

**Ejercicio 2.6.** *Probar que los siguientes grupos son de Lie:*

*(i)* *$S^0$, $S^1$ y $S^3$.*

*(ii)* *$T^n$.*

*(iii)* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

*Un hecho llamativo es que ninguna otra esfera salvo las del item $(i)$ resulta un grupo de Lie.*

**Ejercicio 2.7.** *Describir $\mathrm{Lie}(O(n, \mathbb{R}))$, el álgebra de Lie del grupo ortogonal. Lo mismo con $SO(n, \mathbb{R})$.*

**Ejercicio 2.8.** *Empleando la identificación $T_I(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) \simeq M_n(\mathbb{R})$, probar que el corchete de Lie está dado por $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$ (producto usual de matrices). Probar lo mismo para $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ y $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.*

**Ejercicio 2.9.** *Probar que* $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ *es isomorfo a* $S^1$ *y concluir que es abeliano.*

**Ejercicio 2.10.** *Probar que* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *es difeomorfo a* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

**Ejercicio 2.11.** *Sean* $G$ *y* $H$ *dos grupos de Lie y* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ *sus álgebras de Lie, respectivamente. Probar que un morfismo de grupos de Lie* $f : G \to H$ *induce un morfismo de álgebras de Lie* $f_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *vía la diferencial.*

**Ejercicio 2.12.** *Probar que el álgebra de Lie de un grupo de Lie abeliano tiene corchete trivial, i.e.,* $[\xi, \eta] = 0$ *para todos* $\xi, \eta$. *Un álgebra de Lie con esta propiedad se dice* ***abeliana****.*

**Ejercicio 2.13.** *Probar que todo grupo de Lie es paralelizable. Probar que si* $G = S^1$, $TG$ *es difeomorfo al cilindro* $S^1 \times \mathbb{R}$.

**Ejercicio 2.14.** *Probar que* $S^3$ *es paralelizable, idem el toro* $T^n$.

**Ejercicio 2.15.** *Para cada uno de los siguientes casos, verificar que la curva* $\alpha_v : \mathbb{R} \to G$ *con* $v \in T_e(G)$ *es un subgrupo uniparamétrico de* $G$ *que satisface* $\dot{\alpha}_v(0) = v$ *y que* $\xi \in \mathcal{X}(G)$ *es el correspondiente campo invariante a izquierda generado por* $v$.

*(i)* $G = (\mathbb{R}^n, +)$, *con*

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i|_0, \\ \alpha_v(t) &= t.(v_1, ..., v_n), \\ \xi(u) &= \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i|_u. \end{aligned}$$

*(ii)* $G = (\mathbb{R}_{>0}, .)$, *con*

$$\begin{aligned} v &= a\partial|_1 \\ \alpha_v(t) &= e^{at}, \\ \xi(u) &= au\partial|_u. \end{aligned}$$

**Figure 1:** Marius Sophus Lie (17 de diciembre de 1842, Nordfjordeid-18 de febrero de 1899, Christiania). Su principal contribución fue el estudio de grupos continuos de transfomaciones (i.e., grupos de Lie) a partir de la versión linealizada de ellos dada por los campos de vectores (i.e., de las álgebras de Lie) con especial atención a sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y la geometría.