Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre, 2007

Lista de ejercicios prácticos N° 1
Repaso de superficies en $\mathbb{R}^3$

1 Notación general

En los ejercicios siguientes $M \subset \mathbb{R}^3$ denotará una **superficie regular**, es decir, para todo $p \in M$ punto de la superficie, existe (U, τ) parametrización local alrededor de p, i.e., $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $p \in \tau(U)$, y $\tau : U \to M \subset \mathbb{R}^3$ es C^1 tal que $d\tau(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $x \in U$. Notaremos

$$T_p(M) = \operatorname{Im}(d\tau(\tau^{-1}(p))) \subset \mathbb{R}^3$$

el **espacio tangente a** M **en** p.

A su vez, emplearemos la notación siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(M) &= C^\infty(M, \mathbb{R}), \\
\mathcal{X}(M) &= \{\xi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3) : \xi(p) \in T_p(M), \forall\, p \in M\}, \\
\mathcal{X}^\perp(M) &= \{\xi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3) : \xi(p) \in T_p(M)^\perp, \forall\, p \in M\}.
\end{aligned}$$

y

$$(-)^t : C^\infty(M, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{X}(M)$$

donde $\xi^t(p)$ es la proyección ortogonal de $\xi(p)$ a $T_p(M)$. Notar que $\xi^t(p)$ es C^∞, y por lo tanto $(-)^t$ está bien definido.

2 Generalidades

Ejercicio 2.1. *Probar que $\mathcal{F}(M)$ tiene estructura de anillo (conmutativo con unidad) con la suma y multiplicación usuales (i.e., como funciones). Más aún, demostrar que el morfismo inyectivo*

$$i : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{F}(M)$$

dado por

$$i(s)(p) = s,$$

es un homomorfismo de anillos (unitarios), y por lo tanto induce en $\mathcal{F}(M)$ una estructura de $\mathbb{R}$-álgebra.

Ejercicio 2.2. *Probar que $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{X}(M)$ y $\mathcal{X}^\perp(M)$ poseen estructura de $\mathcal{F}(M)$-módulo, con la multiplicación usual. En otras palabras, demostrar que si $f, g \in \mathcal{F}(M)$ y $\xi, \zeta \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ (resp. $\mathcal{X}(M)$ o $\mathcal{X}^\perp(M)$), probar que*

$$f\xi + g\zeta \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3), \qquad \text{(resp. } \mathcal{X}(M) \text{ o } \mathcal{X}^\perp(M)\text{)},$$

y que

$$1_{\mathcal{F}(M)}\xi = \xi, \forall\, \xi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3), \qquad \text{(resp. } \mathcal{X}(M) \text{ o } \mathcal{X}^\perp(M)\text{)},$$

donde $1_{\mathcal{F}(M)}$ es la unidad de $\mathcal{F}(M)$.

Notar que $\mathcal{X}(M)$ y $\mathcal{X}^\perp(M)$ son $\mathcal{F}(M)$-submódulos de $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$.

Ejercicio 2.3. *Probar que $C^\infty(M, \mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{X}(M) \oplus \mathcal{X}^\perp(M)$ como $\mathcal{F}(M)$-módulos, con la descomposición usual.*

Ejercicio 2.4. *Sea (U, x), con $x = (x_1, x_2) : U \subset M \to \mathbb{R}^2$ una carta de M, y sea $\tau = x^{-1} : x(U) \to M$ la parametrización correspondiente. Se definen ($i = 1, 2$)*

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} : U &\to \mathbb{R}^3, \\ p &\mapsto D\tau(a)(e_i), \end{aligned}$$

donde e_1, e_2 es la base (ordenada) canónica de $\mathbb{R}^2$ y $a \in x(U) \subset \mathbb{R}^2$ está definido a partir de $x(p) = a$. Los notaremos también

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_{x_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Probar que $\partial_{x_i} \in \mathcal{X}(U)$ y si $\xi \in \mathcal{X}(M)$, existen únicas $a_1, a_2 \in \mathcal{F}(U)$ tales que

$$\xi|_U = a_1 \partial_{x_1} + a_2 \partial_{x_2}.$$

Ejercicio 2.5. *Sea $\zeta \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, $\xi \in \mathcal{X}(M)$ y $p \in M$. Se define $d\zeta(p) : T_p(M) \to \mathbb{R}^3$ la diferencial de ζ evaluada en p de la forma siguiente: si $v \in T_p(M)$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ es una curva diferenciable que satisface*

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= p, \\ \alpha'(0) &= \frac{d\alpha}{dt}(0) = v, \end{aligned}$$

entonces

$$d\zeta(p)(v) = \frac{d(\zeta \circ \alpha)}{dt}(0).$$

Notaremos la diferencial también $D\zeta(p)$.

Se define

$$\begin{aligned} d\zeta(\xi) &: M \to \mathbb{R}^3 \\ d\zeta(\xi)(p) &= d\zeta(p)(\xi(p)). \end{aligned}$$

Probar que $d\zeta(\xi) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$.

Ejercicio 2.6. *Sean $\xi \in \mathcal{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Se define*

$$\begin{aligned} \xi(f) : M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto df(p)(\xi(p)). \end{aligned}$$

Probar que $\xi(f) \in \mathcal{F}(M)$.

Ejercicio 2.7. *A su vez, dado $U \subset M$ un abierto, definimos el morfismo $\mathbb{R}$-lineal*

$$\delta_U : \mathcal{X}(U) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(U))$$

mediante $\delta_U(\xi)(f) = \xi(f)$.

Demostrar que δ_U es un isomorfismo para todo U, y más aún, es compatible con las restricciones, i.e., si $V \subset U \subset M$ son abiertos, $\xi \in \mathcal{X}(U)$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, entonces

$$\delta_V(\xi|_V)(f|_V) = (\delta_U(\xi)(f))|_V.$$

Ejercicio 2.8. *Sea $\zeta \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ que escribimos de la forma $\zeta = (z_1, z_2, z_3)$, donde $z_i \in \mathcal{F}(M)$, $1 \le i \le 3$. Si $\xi \in \mathcal{X}(M)$, verificar que*

$$d\zeta(X) = (\xi(z_1), \xi(z_2), \xi(z_3)).$$

3 Operadores diferenciales

Se definen los siguientes operadores:

(i)

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} : \mathcal{X}(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}^3) &\to C^\infty(M, \mathbb{R}^3) \\ (\xi, \eta) &\mapsto \bar{\nabla}_\xi(\eta) = d\eta(\xi), \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M)\\ (\xi, \eta) &\mapsto \nabla_\xi(\eta) = \bar{\nabla}_\xi(\eta)^t,\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\langle\, , \rangle : C^\infty(M, \mathbb{R}^3) \times C^\infty(M, \mathbb{R}^3) &\to \mathcal{F}(M)\\ (\xi, \eta) &\mapsto \langle \xi, \eta\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\end{aligned}$$

donde $\xi = (x_1, x_2, x_3)$ y $\eta = (y_1, y_2, y_3)$.

(iv)

$$\begin{aligned}[\, ,] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to C^\infty(M, \mathbb{R}^3)\\ (\xi, \eta) &\mapsto [\xi, \eta] = \nabla_\xi(\eta) - \nabla_\eta(\xi),\end{aligned}$$

Ejercicio 3.1. *Sean $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{X}(M)$, $\eta, \eta_1, \eta_2, \zeta \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Probar que el operador $\bar{\nabla}$ induce un morfismo $\mathcal{F}(M)$-lineal en la primera componente y una $\mathcal{F}(M)$-derivación en la segunda, es decir, se verifican:*

(i) $\bar{\nabla}_\xi(\eta_1 + \eta_2) = \bar{\nabla}_\xi(\eta_1) + \bar{\nabla}_\xi(\eta_2)$,

(ii) $\bar{\nabla}_\xi(f\eta) = f\bar{\nabla}_\xi(\eta) + \xi(f)\eta$,

(iii) $\bar{\nabla}_{\xi_1+\xi_2}(\eta) = \bar{\nabla}_{\xi_1}(\eta) + \bar{\nabla}_{\xi_2}(\eta)$,

(iv) $\bar{\nabla}_{f\xi}(\eta) = f\bar{\nabla}_\xi(\eta)$.

Demostrar también que se cumple la igualdad

$$\xi(\langle \eta, \zeta\rangle) = \langle \bar{\nabla}_\xi(\eta), \zeta\rangle + \langle \eta, \bar{\nabla}_\xi(\zeta)\rangle.$$

Ejercicio 3.2. *Deducir del ejercicio anterior que ∇ satisface las mismas propiedades que $\bar{\nabla}$. El operador ∇ se denomina la conexión (métrica) usual de M, y el campo $\nabla_\xi(\eta)$ la derivada covariante de η respecto de ξ.*

Ejercicio 3.3. *Probar que las siguientes propiedades de $[\, ,]$ en $\mathcal{X}(M)$*

(i) Si $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, entonces $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$.

(ii) Si $\xi_1, \xi_2, \eta \in \mathcal{X}(M)$, entonces $[\xi_1 + \xi_2, \eta] = [\xi_1, \eta] + [\xi_2, \eta]$.

(iii) Si $\xi, \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{X}(M)$, entonces $[\xi, \eta_1 + \eta_2] = [\xi, \eta_1] + [\xi, \eta_2]$.

(iv) Si $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$, resulta

$$[f\xi, \eta] = f[\xi, \eta] - \eta(f)\xi$$

y también

$$[\xi, f\eta] = f[\xi, \eta] + \xi(f)\eta.$$

Notar que $\mathcal{X}(M)$ posee estructura de $\mathbb{R}$-álgebra de Lie, pero no de $\mathcal{F}(M)$-álgebra de Lie.

(v) Si $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ y $U \subset M$ es un abierto, se obtiene que

$$[\xi, \eta]|_U = [\xi|_U, \eta|_U]$$

donde $[\xi, \eta]|U$ es la restricción del campo $[\xi, \eta]$ a U y el operador $[\, ,]$ correspondiente al miembro derecho está definido en $\mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U)$.

(vi) Sea (U, x) una carta de M, $\partial_i = \partial_{x_i} \in \mathcal{X}(U)$, $i = 1, 2$. Probar que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, para $i, j = 1, 2$.

(vii) *Sean $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, (U, x) una carta de M y sean*

$$\xi|_U = a_1\partial_1 + a_2\partial_2,$$
$$\eta|_U = b_1\partial_1 + b_2\partial_2,$$

donde $\partial_i = \partial_{x_i} \in \mathcal{X}(U)$, $i = 1, 2$.

Probar que $[\xi, \eta]|_U = c_1\partial_1 + c_2\partial_2$, donde $c_i \in \mathcal{F}(U)$, $i = 1, 2$, está dada por

$$c_i(p) = \sum_{j=1}^{2} \left(a_j \frac{\partial(b_i \circ x^{-1})}{\partial u_j}(x(p)) - b_j \frac{\partial(a_i \circ x^{-1})}{\partial u_j}(x(p)) \right),$$

para $p \in U$.

(viii) *Si $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, resulta que $[\xi, \eta] \in \mathcal{X}(M)$, y por lo tanto, $[\,,]$ induce un morfismo*

$$[\,,] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M).$$

El campo $[\xi, \eta]$ se denomina el ***corchete de Lie entre** X **e** Y.*

(ix) *Si $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $[\xi, \eta](f) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))$.*

Ejercicio 3.4. *Deducir del ejercicio anterior, que si $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$, luego*

$$\nabla_\xi(\eta) - \nabla_\eta(\xi) = [\xi, \eta].$$

A su vez, deducir que, si $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(M)$ se obtiene

$$\bar{\nabla}_\xi(\bar{\nabla}_\eta(\zeta)) - \bar{\nabla}_\eta(\bar{\nabla}_\xi(\zeta)) = \bar{\nabla}_{[\xi,\eta]}(\zeta).$$

Ejercicio 3.5. *Sean $p \in M$, $v \in T_p(M)$ y $u \in (T_p(M))^\perp$ con $\|u\| = 1$.*

(a) *Mostrar que existe $\xi \in \mathcal{X}(M)$ tal que $\xi(p) = v$.*

(b) *Demostrar que existe un abierto $U \subset M$ y un campo $\zeta \in \mathcal{X}^\perp(M)$ tales que $p \in U$, $\zeta(p) = u$ y $\|\zeta(q)\| = 1$, $\forall\, q \in U$.*

4 Curvatura y el Theorema Egregium de Gauss

Ejercicio 4.1. *Se define*

$$S : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}^\perp(M) \to \mathcal{X}(M)$$
$$(\xi, \zeta) \mapsto -(\bar{\nabla}_\xi(\zeta))^t,$$

que denotaremos también $S(\xi, \zeta) = S_\zeta(\xi)$.

(i) *Sean $p \in M$ y $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$ dos campos tales que $\xi(p) = \xi'(p)$. Mostrar que $S(\xi, \zeta)(p) = S(\xi', \zeta)(p)$.*

(ii) *Sean $p \in M$ y $\zeta, \zeta' \in \mathcal{X}^\perp(M)$ tales que $\zeta(p) = \zeta'(p)$. Probar que $S(\xi, \zeta)(p) = S(\xi, \zeta')(p)$.*

El operador S se denomina **segundo tensor fundamental de** M. El nombre tensor se debe a las propiedades (a) y (b). A su vez, el operador $\langle\,,\rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ se denomina **primer tensor fundamental de** M.

Ejercicio 4.2. *Por el ejercicio anterior, si $p \in M$ y $u \in (T_p(M))^\perp$, el morfismo*

$$S_u : T_p(M) \to T_p(M),$$
$$v \mapsto S_\zeta(\xi)(p),$$

donde $\zeta \in \mathcal{X}^\perp(M)$ y $\xi \in \mathcal{X}(M)$ son dos campos tales que $\zeta(p) = u$ y $\xi(p) = v$, está bien definido.

Probar que el operador S_u es simétrico, es decir, $\langle S_u(v), w\rangle = \langle v, S_u(w)\rangle$, $\forall\, v, w \in T_p(M)$.

Sugerencia: Considerar $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$ y $\zeta \in \mathcal{X}^\perp(M)$ tales que $\xi(p) = v$, $\xi'(p) = w$ y $\eta(p) = u$. Utilizar la última igualdad del ejercicio 3.1, y el ejercicio 3.3, item (viii), teniendo en cuenta que

$$\xi(\langle \xi', \zeta\rangle) = \xi'(\langle \xi, \zeta\rangle) = 0.$$

Ejercicio 4.3. *Si $\zeta \in \mathcal{X}^{\perp}(M)$, se define*

$$\begin{aligned} l_\zeta : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{F}(M) \\ (\xi, \eta) &\mapsto \langle S_\zeta(\xi), \eta \rangle. \end{aligned}$$

Deducir del ejercicio anterior que l_ζ es simétrico, i.e., $l_\zeta(\xi,\eta) = l_\zeta(\eta,\xi)$, y que para cada $p \in M$ y $u \in (T_p(M))^{\perp}$ queda definida una forma bilineal simétrica

$$\begin{aligned} l_u : T_p(M) \times T_p(M) &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto l_\zeta(\xi,\eta)(p), \end{aligned}$$

donde $\zeta(p) = u$, $\xi(p) = v$ e $\eta(p) = w$.

*l_ζ se denomina la **segunda forma fundamental de** M **respecto de** N.*

Ejercicio 4.4. *Sea $K : M \to \mathbb{R}$ la curvatura de Gauss de M, es decir, si $p \in M$ y (U, x) es una carta de M con $p \in U$ y $x = (x_1, x_2)$, sea $\zeta \in \mathcal{X}^{\perp}(U)$ el campo transversal*

$$\zeta = \frac{\partial_{x_1} \times \partial_{x_2}}{\|\partial_{x_1} \times \partial_{x_2}\|},$$

entonces

$$K(p) = \det(d\zeta(p)).$$

- *Sean $p \in M$, $u \in (T_p(M))^{\perp}$ con $\|u\| = 1$, $U \subset M$ un abierto y $\zeta \in \mathcal{X}^{\perp}(M)$ tales que $p \in U$, $\zeta(p) = u$ y $\|\zeta(q)\| = 1$, $\forall\, q \in U$. Verificar que $S_u = -d\zeta(p)$, y en consecuencia $K(p) = \det(S_u)$.*
- *Deducir que si $\{v, w\}$ es una base ordenada de $T_p(M)$, entonces*

$$K(p) = \frac{l_u(v,v) l_u(w,w) - (l_u(v,w))^2}{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}.$$

Ejercicio 4.5. *Sean $\xi, \eta, \theta \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$, $U \subset M$ un abierto y $\zeta \in \mathcal{X}^{\perp}(M)$ tales que $p \in U$, $\|\zeta(q)\| = 1$, $\forall\, q \in U$. Probar las siguientes igualdades sobre U*

(i) Ecuación de Gauss:

$$\bar{\nabla}_{\eta|_U}(\theta|_U) = \nabla_{\eta|_U}(\theta|_U) + l_{\zeta|_U}(\eta|_U, \theta|_U)\zeta|_U.$$

(ii)

$$(\bar{\nabla}_\xi(\bar{\nabla}_\eta(\theta)))^t = \nabla_\xi(\nabla_\eta(\theta)) - l_\zeta(\eta,\theta) S_\zeta(\xi).$$

(iii) Teniendo en cuenta que por definición

$$(\bar{\nabla}_{[\xi,\eta]}(\theta))^t = \nabla_{[\xi,\eta]}(\theta),$$

ya que $[\xi,\eta] \in \mathcal{X}(M)$, deducir del item anterior y del ejercicio 3.4 la siguiente igualdad sobre U

$$\nabla_\xi(\nabla_\eta(\theta)) - \nabla_\eta(\nabla_\xi(\theta)) - \nabla_{[\xi,\eta]}(\theta) = l_\zeta(\eta,\theta) S_\zeta(\xi) - l_\zeta(\xi,\theta) S_\zeta(\eta).$$

Ejercicio 4.6. *Se define el operador*

$$\begin{aligned} R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\to \mathcal{X}(M) \\ (\xi, \eta, \zeta) &\mapsto \nabla_\xi(\nabla_\eta(\zeta)) - \nabla_\eta(\nabla_\xi(\zeta)) - \nabla_{[\xi,\eta]}(\zeta), \end{aligned}$$

que notaremos también $R(\xi,\eta)\zeta$.

Sean $p \in M$ y $u \in (T_p(M))^{\perp}$ con $\|u\| = 1$. Demostrar que, si $v, w, z \in T_p(M)$ y $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{X}(M)$ satisfacen que $\xi(p) = v$, $\eta(p) = w$ y $\zeta(p) = z$, entonces

$$(R(\xi,\eta)\zeta)(p) = l_u(w,z) S_u(v) - l_u(v,z) S_u(w).$$

Por lo tanto, R es un tensor, pues $(R(\xi,\eta)\zeta)(p) = (R(\xi',\eta')\zeta')(p)$ para cualesquiera campos $\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta' \in \mathcal{X}(M)$ que satisfagan $\xi(p) = \xi'(p)$, $\eta(p) = \eta'(p)$ y $\zeta(p) = \zeta'(p)$.

De acuerdo con lo anterior, el tensor R induce para cada $p \in M$ una aplicación trilineal

$$\begin{aligned} R_p : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) &\to T_p(M) \\ (v, w, z) &\mapsto (R(\xi,\eta)\zeta)(p), \end{aligned}$$

donde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ son campos tales que $\xi(p) = v$, $\eta(p) = w$ y $\zeta(p) = z$.

Ejercicio 4.7. *Demostrar que, si $p \in M$ y $\{v, w\}$ es una base ordenada de $T_p(M)$, entonces*

$$K(p) = \frac{\langle R_p(v,w)w, v\rangle}{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2}.$$

R se denomina el ***tensor de curvatura de*** *M.*

Ejercicio 4.8. *Sea (U, x) una carta de M, $x = (x_1, x_2)$, $\partial_i = \partial_{x_i}$, $i = 1, 2$. Definimos $g_{ij} \in \mathcal{F}(U)$ dado por*

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle,$$

que inducen una función $g \in C^\infty(U, M_2(\mathbb{R}))$.

Sean $g^{ij} \in \mathcal{F}(U)$ definidas como la componente (ij) de la función matricial matriz $g^{-1} \in C^\infty(U, M_2(\mathbb{R}))$. A su vez, definimos $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$ a partir de

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Demostrar que

$$\Gamma_{ij}^k(p) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{lk}(p)\left(\frac{\partial(g_{il}\circ x^{-1})}{\partial u_j}(x(p)) + \frac{\partial(g_{jl}\circ x^{-1})}{\partial u_i}(x(p)) - \frac{\partial(g_{ij}\circ x^{-1})}{\partial u_l}(x(p))\right),$$

donde $p \in U$.

Ejercicio 4.9. *Concluir de los dos ejercicios anteriores el Theorema Egregium de Gauss.*

Figure 1: Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777, Brunswick-23 de febrero de 1855, Göttingen). Es considerado uno de los iniciadores de la geometría no euclidiana. En su obra *Disquisitiones generales circa superficies curva* en 1828 expuso su Theorema Egregium (i.e., notable).