

---

# ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN CS. BIOLÓGICAS)

Segundo cuatrimestre de 2007

## Práctica 3: Límites y continuidad

---

**Ejercicio 1.** Usando las propiedades básicas de los límites funcionales calcular los siguientes límites. En cada caso indicar qué propiedades se han empleado:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 2)\sqrt{3x - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + 1)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{2x+5}}{x + 2}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^3 - b^3}{x - b}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x + 4}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x + 3} - \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 5}}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

(j)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t + h)^2 - t^2}{h}$  con  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t$  fijo

(k)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \tan x}{\cos \frac{2x}{3}}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 9x + 2}{x^2 - 4}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{4x + 1} - 3}$

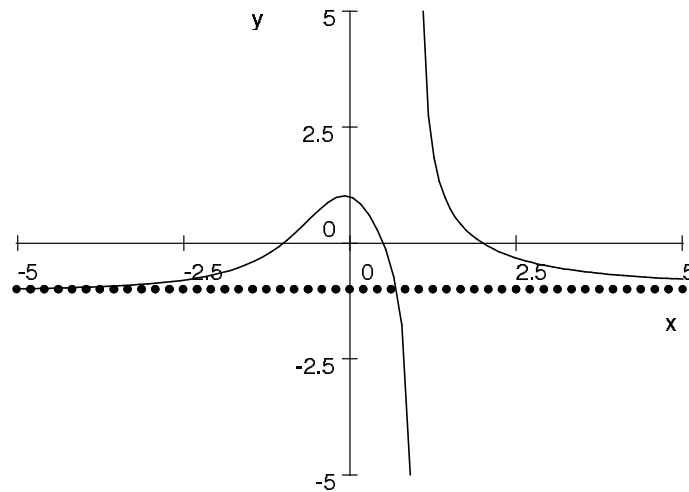
**Ejercicio 2.**

(a) Hacer un gráfico aproximado de  $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) Verificar gráficamente que vale  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

(c) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

**Ejercicio 3.** Consideremos una función  $f(x)$  cuyo gráfico es:



- (a) Determinar el dominio de esta función y sus límites en los extremos del conjunto dominio.
- (b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = -1$  ?
- (c) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = 0$  ?
- (d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación  $f(x) = m$ , donde  $m$  es un determinado número real?  
Considerar todas las posibilidades.

**Ejercicio 4.** Calcular los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - x^3 + 2}{3x^4 - 3x^2 + 1}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 2x^2}{3x^2 - 2x + 2}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 - \sqrt{3}^{10}}{x} + 9x^7$

(g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7 - 10x^3 + 3)$

(h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^6 + x^5 + \sqrt{x})$

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{-7x^2 + 3x + \sqrt{x}}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2 \ln(x + 1))$

(j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$

**Ejercicio 5.** De acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene masa  $m$  cuando se mueve a la velocidad  $v$  tiene masa dada por la expresión  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. ¿Qué sucede cuando  $v \rightarrow c$  ?

**Ejercicio 6.** Un problema cuantitativo importante de la ciencia pesquera consiste en evaluar el número de peces hembra que desovan en los ríos y emplear esta información para extrapolar

el número de peces maduros (llamados 'reclutas') que volverán a los ríos durante el siguiente período de reproducción. Si  $R$  es el número de reclutas y  $H$  el número de peces hembra del período anterior, las investigaciones cuantitativas de Beverton & Holt (1957) afirman que  $R = R(H) = \frac{H}{\alpha H + \beta}$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas. Demostrar que, de acuerdo con esta función, para un número  $H$  de hembras suficientemente grande el reclutamiento será aproximadamente constante.

**Ejercicio 7.** Cierta población biológica comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc.) la población puede llegar a saturar los recursos del habitat, y su crecimiento se amortigua. Entonces el crecimiento se describe por la función logística:

$$f(t) = \frac{l}{1 + ke^{-at}}$$

donde  $l$ ,  $k$  y  $a$  son parámetros (constantes) que no dependen del tiempo  $t$ .

- (a) ¿Cuál es la población inicial en este modelo?
- (b) ¿Cuál es la población límite? (Calcular el límite de  $f(t)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .)
- (c) Si  $l$  y  $k$  fueran números grandes (respecto de los valores de  $t$ ) la función  $f(t)$  es próxima a la función exponencial  $g(t) = \frac{l}{1+k} e^{at}$ , concordando con lo que afirmamos al comienzo. Supongamos que una población de moscas tiene los parámetros :

$$l = 10 \qquad k = 999 \qquad a = 0,02$$

Verificar mediante una tabla de valores que la logística y la exponencial son muy similares para  $t < 100$ . Ambas funciones seguirán siendo próximas si vale  $100 < t < 200$  ¿Qué ocurre para  $t > 200$ ?

**Ejercicio 8.** Calcular los siguientes límites:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \cos(x + \frac{1}{x})$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \sin(\frac{1}{x-2})$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(h(x))$ , con  $h(x)$  cualquier función
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos[\ln(1 + \frac{1}{x})]$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot e^{\cos \frac{1}{x}}$

**Ejercicio 9.** Sabiendo que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  calcular:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{\tan^2(\pi x)}$
- (h)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$
- (i)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$
- (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$
- (k)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

**Ejercicio 10.**

- (a) Comprobar gráficamente que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- (b) ¿Qué puede decir de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n}$  y de  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n}$  para  $n$  par?
- (c) La misma pregunta para  $n$  impar.

**Ejercicio 11.** Consideramos la función  $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3}$

- (a) Determinar el dominio de  $f$ .
- (b) ¿Se puede calcular directamente  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ? ¿Por qué?
- (c) Determinar la función  $g$  definida por  $g(h) = f(1+h)$ .
- (d) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ . Deducir  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .
- (e) ¿Admite  $f(x)$  asíntotas verticales u horizontales? Justificar la respuesta.

**Ejercicio 12.** Determinar los números reales  $a$  y  $b$  para que se verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 1}{x} = 3 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 1}{x} = 2$$

**Ejercicio 13.** En cada uno de los siguientes casos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y representar gráficamente.

- (a)  $f(x) = |3x - 6|$
- (b)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$
- (c)  $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

**Ejercicio 14.** Calcular los siguientes límites :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 5)^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(2x)}{x} \right)^{\frac{\tan x}{3x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{2x-5} \right)^{\frac{x+1}{3x+1}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x} \right)^{x+1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(2x)}{\sin x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(3x^2)}{\sin(4x^2)} \right)^{\frac{1}{x}}$$

**Ejercicio 15.** Sabiendo que  $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$  calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^x$$

$$(e) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$(c) \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$(g) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha+h} - e^\alpha}{h}$$

**Ejercicio 16.** Calcular los siguientes límites :

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi - x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^2 x}{x + \sin 2x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

**Ejercicio 17.** Dadas las constantes arbitrarias  $a$  y  $b$ , demostrar que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2}\right)^t$  es independiente de la elección de  $b$ .

**Ejercicio 18.** Estudiar límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados. En caso de discontinuidad, discutir el tipo:

$$(a) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \quad \text{en } x = 0$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad \text{en } x = 0$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$(g) f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad \text{en } x = 2$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{en } x = 2$$

$$(h) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^3 - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 19.** Determinar el conjunto de puntos de discontinuidad (en  $\mathbb{R}$ ) de las siguientes funciones. Redefinirlas, si fuera posible, para que resulten continuas :

$$(a) f(x) = \frac{x-1}{x(x^2-4)}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}} - 4}{2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 2}$$

$$(d) f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$(g) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - x} & \text{si } x > 1 \\ \frac{\text{sen}(-2x+2)}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 20.** Determinar  $a$  y  $b$  de manera que cada una de las siguientes funciones sea continua.

$$(a) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ ax + b & \text{si } x \in (0, 2) \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

**Ejercicio 21.** En cada una de las siguientes funciones, estudiar la continuidad en  $\mathbb{R}$ . Si hubiera discontinuidades, clasificarlas y, de ser posible, redefinir la función para hacerla continua.

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{9x-18}{x^2+4x-12} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 22.** Analizar la continuidad en  $x_0 = 5$  de la función así definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^{x-5} & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{45 \operatorname{sen}(x-5) \ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)} + 15 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

¿Qué se puede decir de la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R} - \{5\}$ ?

**Ejercicio 23.** ¿Cómo debe elegirse la constante  $A$  en la definición de la siguiente función, si queremos que la función  $f$  resulte continua?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 24.** Demostrar que el polinomio  $P(x) = x^3 + x + 1$  tiene al menos una raíz real en el intervalo  $(-1; 0)$ .

**Ejercicio 25.** Demostrar que los gráficos de las funciones  $f(x) = e^x$  y  $g(x) = x + 2$  se cortan para algún  $x_0 \geq 0$ .

**Ejercicio 26.** Demostrar la existencia de  $x_0 \in (1, e)$  tal que  $\frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{3}$ .

**Ejercicio 27.** Determinar la existencia de raíces reales de la función  $f(x) = \frac{|x|}{4-x^2}$  en los intervalos  $[-4; -3]$ ,  $[-3; 3]$  y  $[-1; 1]$ .

**Ejercicio 28.** Una determinada compañía vende un producto de consumo por kg (o fracción). Para favorecer compras grandes, la productora cobra \$1,10 por kg en compras de menos de 8 kg, mientras que cobra \$1 por kg si se compra 8 kg o más.

(a) Expresar matemáticamente la función costo  $C(x)$  donde  $x$  indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

- (b) ¿ $C(x)$  es continua? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.
- (c) Explicar por qué no conviene (en estas condiciones) que un cliente compre 7,5 kg de este producto.

**Ejercicio 29.** La misma compañía productora del problema anterior vende un segundo producto a \$1,20 por kg los primeros 5 kg, y para compras mayores a 5 kg cobra \$6 más \$0,90 por cada kilo que sobrepase los 5.

- (a) Expresar matemáticamente la función costo  $C(x)$  donde  $x$  indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.
- (b) ¿ $C(x)$  es continua? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.