Parte B: Programación Dinámica

1. Se tiene una grilla de $n \times m$ casillas. Desde la casilla $(1,1)$ se desea ir hasta la (n,m) mediante caminos que van por casillas adyacentes (ie, NO cuentan las que se tocan en las esquinas). Diseñar un algoritmo mediante programación dinámica que calcule la cantidad de caminos de longitud mínima entre ambas celdas. Determine la complejidad.

2. Sea $M \in N^{m \times n}$ una matriz de números naturales. Se desea obtener un camino que empiece en la casilla superior izquierda $(1,1)$, termine en la casilla inferior derecha (m,n), y tal que minimice la suma de los valores de las casillas por las que pasa. En cada casilla (i,j) hay dos movimientos posibles: ir hacia abajo (a la casilla $(i+1,j)$), o ir hacia la derecha (a la casilla $(i,j+1)$). Diseñe un algoritmo mediante programación dinámica que permita resolver este problema. Determine la complejidad.

3. Implementar un algoritmo usando la técnica de programación dinámica para poder resolver el problema de la mochila (versión clásica). Se tienen n items con pesos en kilos $a_1,\ldots,a_n$, como máximo puedo cargar M kilos. Cada ítem tiene un valor de utilidad v_i. Se desea encontrar una elección posible de los items tal que su peso total sea menor o igual a M y además su utilidad total sea máxima. Estudiar la complejidad. ¿Diría usted que es un algoritmo "eficiente"?

4. Se tiene $G=(V,E)$ un grafo dirigido acíclico con costos en las aristas. Sea V_0 el conjunto de vértices terminales, donde decimos que un vértice v es terminal si no existe ningún vértice w tal que $v \to w \in E$. Dado un vértice $u \in V$, consideramos C_u todos los caminos que salen de u y terminan en algún vértice de V_0. Diseñar un algoritmo para calcular el camino de menor costo total utilizando programación dinámica. Determinar la complejidad.

   (SUGERENCIA:

   - Defínase la función $f : V \mapsto \mathbb{R}$ que dado un vértice $v \in V$ devuelva el costo del cámino de menor costo de C_v.
   - Demostrar o convencerse de que $f(v) = min\{c(v,w) + f(w),\ v \to w \in E\}$.
   - Utilizar la ecuación anterior para construir el esquema de programación dinámica.)

5. Siguiendo en el esquema anterior, supongamos nuevamente G un grafo dirigido y acíclico, representando una red vial en una región montañosa. Cada vértice representa una ciudad y cada arista un trecho de camino, de cada trecho se registra la altura máxima del mismo. La idea es determinar un camino desde la ciudad A hasta alguna de las ciudades terminales (V_0) de manera tal de minimizar la máxima altura por la cual debe transitar.

6. Se quiere dar vuelto a un cliente usando el mínimo número posible de monedas. Hay monedas de 1,5, 10 y 25 centavos.

   a) Dado un importe M, implementar un algoritmo mediante la técnica de programación dinámica para devolver la mínima cantidad de monedas necesarias para poder cumplir el requerimiento. Suponga que se tiene una cantidad infinita de monedas de cada denominación. Calcule la complejidad.

   b) Adapte el algoritmo anterior para denominaciones arbitrarias $d_1,\ldots,d_n$. Notar que si no hay monedas de 1 centavo podría ser imposible juntar exactametne el monto deseado, tener esto en cuenta.

7. Una vez por mes un avión transporta a una base antártica unidades de n tipos distintos de repuestos. Cada tipo de repuesto tiene un peso w_i (entero) y el peso total de la carga no podrá superar P (también entero). Salvo por el peso, no hay restricción en cuanto a la cantidad de repuestos de cada tipo. A fin de

mes, existirá una probabilidad $p_i(z)$ de que la base hubiera necesitado z unidades de ese repuesto (hasta un máximo de $N >> 1$), se tendrá así un costo de c_i por cada unidad faltante del tipo i en concepto de demanda insatisfecha. El objetivo es determinar la carga (es decir, los valores x_i) que permitan minimizar el costo total esperado.

Recuerde, el costo total esperado es $\sum_{i=1}^{n} \sum_{z=x_i+1}^{N} p_i(z)c_i$.