Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2008

Práctica 9: Teoría de Computabilidad

1. Probar que una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es recursiva si y sólo si la función característica de su gráfico es recursiva, es decir la función dada por la siguiente fórmula:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = f(x) \\ 0 & \text{si } y \neq f(x) \end{cases}$$

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función recursiva y suryectiva. Probar que existe una función recursiva e inyectiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(f(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$.

3. Probar que existe una función recursiva primitiva $g(u,v,w)$ tal que $\Phi^{(3)}(u,v,w,z) = \Phi_{g(u,v,w)}(z)$.

4. (**) Probar que la siguiente función es computable, pero no es recursivo primitiva.

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{si } x = 0 \\ A(x-1,1) & \text{si } y = 0 \text{ y } x \neq 0 \\ A(x-1, A(x, y-1)) & \text{si no} \end{cases}$$

5. Probar que las siguientes funciones son parcialmente computables:

$$f(x) = \begin{cases} \Phi(x,x)+1 & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(x,x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6. *a*) Sea f la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que f es parcialmente computable y que existe una función recursiva primitiva h de una variable tal que $f(x,y) = \psi_{h(x)}(y)$.

b) Probar que $\psi_{h(x)}$ es una función constante si y sólo si $\psi_x(x)$ está definida.

c) Probar que el conjunto de los números naturales x tales que ψ_x es constante no es recursivo.

7. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función computable biyectiva. Probar que $Halt(f(x), x))$ no es computable. Sugerencia, considere la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(x, f^{-1}(x)) \uparrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8. Sea f una función parcialmente computable. Decidir si la siguiente función es parcialmente computable:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Domf \\ \uparrow & \text{si } x \notin Domf \end{cases}$$

9. Probar que la siguiente función no es parcialmente computable:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ está en la imagen de } \psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

10. Decimos que una función parcialmente computable f es *extensible* si existe una función g computable tal que existe una función parcialmente computable g tal que $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio de f. Probar que existe una función parcialmente computable que no es extensible.

11. Probar que hay funciones parcialmente computables g de una variable para las cuales la función f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = y \\ 0 & \text{si } g(x) \neq y \end{cases}$$

no es computable. ¿Qué podría decir de f cuando g es total computable?