

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2008

Práctica 8: Funciones Recursivas Primitivas

1. Sean ψ y ϕ funciones numéricas totales de una y dos variables respectivamente. Analizar cuáles de las siguientes definiciones de f son definiciones por recursión primitiva.

- a) $f(x, 0) = 17$.
 $f(x, y + 1) = f(0, \phi(x, y))$.
- b) $f(x, 0) = \psi(x)$.
 $f(x, y + 1) = f(x, y) + \phi(y, x)$.
- c) $f(x, 0) = \phi(0, x)$.
 $f(x, y + 1) = \phi(f(x, y), y + 1)$.

Para cada una de las definiciones que representen una recursión primitiva, especificar las funciones g y h asociadas a partir de las cuales se obtiene f por recursión primitiva.

2. Probar que cada una de las siguientes funciones es primitiva recursiva.

- a) $max(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } x < y \end{cases}$
- b) $min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ y & \text{si } x > y \end{cases}$
- c) $par(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$
- d) $hf(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.
- e) $sqr(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.
- f) $psq(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un cuadrado perfecto} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

3. Sean ψ y ϕ funciones recursivas primitivas de una y dos variables, respectivamente. Mostrar que cada una de las funciones siguientes es también primitiva recursiva.

a) La función f_1 de una variable, donde $f_1(0) = \psi(0)$, $f_1(1) = \psi(\psi(1) + 1) + 1$, y en general:

$$f_1(x) = \psi(\psi(\dots(\psi(x) + 1)\dots) + 1) + 1.$$

donde la cantidad de veces que aparece ψ es $x + 1$.

b) La función f_2 de dos variables, donde $f_2(x, 0) = \phi(x, 0)$, $f_2(x, 1) = \phi(\phi(x, 1), 0)$, y en general:

$$f_2(x, y) = \phi(\phi(\phi(\dots\phi(\phi(x, y), y - 1)\dots 2), 1), 0).$$

4. Usar las definiciones por sumas y/o productos acotados para establecer la recursividad primitiva de cada una de las funciones siguientes. Suponer que g es una función primitiva recursiva de una variable.

a) $f(y) =$ el número de valores de i en el intervalo $0 \leq i \leq y$ para los cuales $g(i) > 3$.

b) $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(i + 1) > g(i) \text{ para todo } x \leq i \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

c) $f(w, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \text{ y } w \text{ es el mayor entre } g(x), g(x + 1), \dots, g(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

5. Sea g una función recursiva primitiva de $n + 1$ variables, s, t funciones recursivas primitivas de 1 variable. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas.

a) $f_1(x_1, \dots, x_n, y) = \max_{0 \leq i \leq y} (g(x_1, \dots, x_n, i))$.

b) $f_2(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} \max_{s(y) \leq i \leq t(y)} (g(x_1, \dots, x_n, i)) & \text{si } s(y) \leq t(y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

6. Probar que las funciones dadas a continuación son primitivas recursivas. Pueden usarse como funciones auxiliares, las dadas en la clase teórica o las ya calculadas anteriormente.

a) $shr(x, n) = \lfloor \frac{x}{2^n} \rfloor$.

b) $lg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor \log_2(x) \rfloor + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

c) $dig(x, n)$ = el n -ésimo dígito en la representación binaria de x , contando desde la derecha y comenzando con 0. Así, $dig(13, 0) = 1$, $dig(13, 1) = 0$, $dig(13, 2) = 1$, $dig(13, 3) = 1$, $dig(13, 4) = 0$, etc.

d) $wgt(x)$ = el número de unos en la representación binaria de x .

7. Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

a) $f(n)$ es el último dígito del desarrollo decimal de n .

b) $f(n)$ es el primer dígito del desarrollo decimal de n .

8. Probar que las siguientes funciones son recursivas primitivas:

a) $G(n, m)$ es la cantidad de números primos entre n y m .

b) $G(n, m) = f^n(m)$, donde f es recursiva primitiva.

9. Probar que la función de Fibonacci es primitiva recursiva. Esta función está definida por

$$\begin{aligned}F(0) &= 0 \\F(1) &= 1 \\F(n+2) &= F(n+1) + F(n)\end{aligned}$$

10. Probar que la siguiente función es primitiva recursiva.

$$\begin{aligned}H(0) &= 0 \\H(n+1) &= 1 + \prod_{i=0}^n H(i)\end{aligned}$$

11. De las funciones definidas en los últimos cuatro ejercicios de la práctica anterior. ¿Cuáles son primitivas recursivas?