

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre 2008

Práctica 5: Cálculo de Predicados

1. Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P , dos símbolos de función f_1, f_2 , donde f_1 es unario y f_2 es binario, y un símbolo de constante c . Decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje \mathcal{L} son términos y cuáles son fórmulas, donde x, y denotan variables.

- a) $\exists f_2(x) P(f_2(x))$. d) $\forall c \exists x P(x, c)$
 b) $f_2(f_1(x), f_1(y))$. e) $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$.
 c) $\forall x \exists c P(x, c)$. f) $\exists x P(x, y) \forall y$.

2. Sea \mathcal{L} un lenguaje con un símbolo de predicado binario P . En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dichas fórmulas.

- a) $\forall x \exists y P(x, x)$. c) $\exists x (\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$.
 b) $(\exists x P(y, y) \rightarrow \exists y P(y, z))$. d) $\forall z (\forall x P(x, y) \vee P(x, z))$.

3. Para cada uno de los siguientes lenguajes, en donde f es unario y g binario, decidir si son interpretaciones de dichos lenguajes los siguientes ejemplos

a) $\mathcal{C} = \emptyset, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{=\}, U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g_I(n, m) = n + m$.

b) $\mathcal{C} = \{c\}, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{=\}, U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n, m) = n + m, c_I = 2$.

c) $\mathcal{C} = \{c, d\}, \mathcal{F} = \{f, g\}, \mathcal{P} = \{=\}, U_I = \mathbf{N}, c_I = d_I = 0$

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$$g_I(n, n) = n^2 - n$$

4. En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados.

- a) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \exists z ((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$,
 donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I = <$, $Q_I(x)$ significa x es un número racional.
- b) $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge P(y, x)))$,
 donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x, y)$ significa x nace en el día y , $Q_I(x)$ significa x es un día, y $R_I(x)$ significa x es un esclavo.
- c) $\forall x \forall y (Q(x) \wedge Q(y)) \rightarrow P(f(x, y))$,
 donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa x es par, $P_I(x)$ significa x es impar, y $f_I(x, y) = x + y$.

5. Describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados, en los cuales el universo de la interpretación es el conjunto de la gente, donde P es un símbolo de predicado binario, tal que $P_I(x, y)$ significa x quiere a y .

- a) $\exists x \forall y P(x, y)$ b) $\forall y \exists x P(x, y)$ c) $\exists x \exists y (\forall z P(y, z) \rightarrow P(x, y))$ d) $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

6. Sea \mathcal{L} el lenguaje con igualdad que consiste de un símbolo de función binario f y una constantes c . Para cada una de las siguientes interpretaciones

- $U_I = \mathbb{N}$, $f_I(x, y) = x + y$, $c_I = 1$
- $U_I = \mathbb{N}$, $f_I(x, y) = x \cdot y$, $c_I = 0$

Escribir en el lenguaje castellano la propiedad que determinan los siguientes enunciados y analizar la veracidad o falsedad de los mismos.

- a) $\forall x \exists y (x = f(y, y) \vee x = f(f(y, y), c))$
 b) $\exists y \forall x (x = f(y, y) \vee x = f(f(y, y), c))$
 c) $\forall x \forall y (f(x, y) = c \rightarrow (x = c \vee y = c))$,

7. Traducir las siguientes sentencias en enunciados:

- a) Ningún político es honesto.
- b) No todas las aves pueden volar.
- c) x es trascendente si y sólo si x es irracional.
- d) Ivanoff odia a todas las personas que no se odian a sí mismas.
- e) Todos aman a alguien y ninguno ama a todos, o bien alguien ama a todos.

8. Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

- a) Existen al menos dos elementos.
- b) Existen exactamente dos elementos.
- c) Existen a lo sumo dos elementos.

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario P , escribir:

- e) Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad P .
- f) Si existe un elemento que cumple la propiedad P , es único.
- g) Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

9. Sea \mathcal{L} un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 las siguientes interpretaciones:

- a) $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +)$.
- b) $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$.

donde \mathbb{N} denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

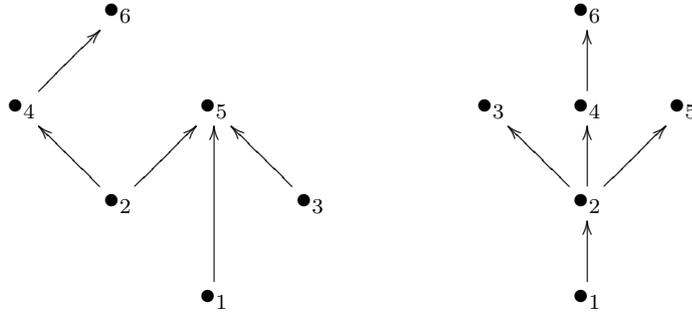
10. Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n + 1$ elementos, y tiene la propiedad que n elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

11. Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario \leq (reflexivo, antisimétrico y transitivo).

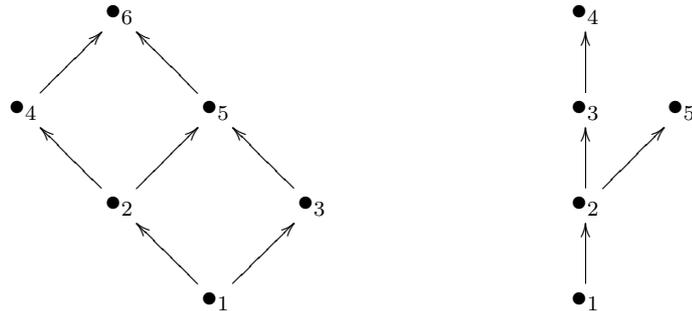
- a) En cada una de las siguientes interpretaciones, buscar los elementos que verifican la fórmula

$$\alpha = \exists y \exists z ((y \leq x) \wedge \neg(x \leq y) \wedge (z \leq x) \wedge \neg(x \leq z) \wedge \neg((y \leq z) \vee (z \leq y)))$$

b) Para cada una de las siguientes interpretaciones, buscar una fórmula que se verifique sólo para 6



12. Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario \leq (reflexivo, antisimétrico y transitivo). Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles:



13. Sea \mathcal{L} un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario \leq (reflexivo, antisimétrico y transitivo). ¿Cuántos subconjuntos definibles tiene el universo de la siguientes interpretaciones?

