ELEMENTOS DE CALCULO NUMERICO

Adicionales Práctica 3

Ejercicio 1 Para $a \neq 0$, considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & c_1 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & = & c_2 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & c_3 \end{array} \right.$$

a) Halle **todos** los valores de a para los cuales el método de Jacobi aplicado al sistema es convergente.

b) Halle **todos** los valores de a para los cuales el método de Gauss-Seidel aplicado al sistema es convergente.

c) Determine un valor de a para el que Jacobi sea convergente y Gauss-Seidel no, y otro valor de a para el que Gauss-Seidel converja y Jacobi no lo haga.

Ejercicio 2 Consideramos la descomposición $A = D + L + U$, siendo D diagonal, L triangular inferior estricta y U triangular superior estricta.

a) Pruebe que resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver

$$\left(D + \frac{1}{2}L\right) x = -\left(\frac{1}{2}L + U\right) x + b$$

b) Consider el método de punto fijo

$$x_{n+1} = Bx_n + c$$

donde $B = -\left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}L + U\right)$ y $c = \left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1} b$.

Demuestre que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de la matriz B **si y sólo si** λ es raíz de la ecuación

$$\det\left(\tfrac{1}{2}L + U + \lambda\left(D + \tfrac{1}{2}L\right)\right) = 0$$

c) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que el método anterior converge si y sólo si $a^2 < 1/2$.

d) Verifique que el método de **Gauss-Seidel** satisface la misma condición del ítem anterior sobre el parámetro a. ¿**Cuál de los dos métodos eligiría**?.

Ejercicio 3 Sea $A_n \in \mathbb{R}^{nxn}$ definida por

$$(A_n)_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccc} i & \text{si} & i = j \\ \frac{(-1)^{i+j}}{i+1} & \text{si} & i \neq j \end{array} \right.$$

a) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ el método de Jacobi asociado a A_n converge.

b) Demostrar que el método de Gauss-Seidel asociado a A_3 converge.