Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer Cuatrimestre - 2010

Práctica 7: Teorema de Poincaré-Bendixson

Conjuntos Limites y Atractores

1. Dibujar el diagrama de fases y mostrar que el intervalo $[-1,1]$ sobre el eje x es un conjunto de atracción para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3, \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

¿Es el intervalo $[-1,1]$ un atractor?

2. Determinar el ω-límite y el α-límite de los puntos del plano para los flujos de los siguientes sistemas:

$a)$ $\begin{cases} \dot{x} = -y + xr^2 \sin(\frac{\pi}{r}), \\ \dot{y} = x + yr^2 \sin(\frac{\pi}{r}), \end{cases}$ donde $r^2 = x^2 + y^2$.

$b)$ $\ddot{x} + x - x^2 = 0.$

$c)$ $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen}(y), \\ \dot{y} = -\operatorname{sen}(x). \end{cases}$

3. Determinar el ω-límite y el α-límite de los puntos del plano para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\,(x^2+y^2)\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \\ \dot{y} = x + y\,(x^2+y^2)\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

4. Escribir el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-r^2)(4-r^2) \\ \dot{y} = x + y(1-r^2)(4-r^2) \end{cases} \qquad \left(r^2 = x^2+y^2\right)$$

en coordenadas polares. Dibujar el diagrama de fases y determinar los conjuntos límite de las trayectorias del sistema. Mostrar que este sistema tiene dos ciclos límite Γ_1 y Γ_2. Hallar Γ_1 y Γ_2 y determinar su estabilidad.

5. Considerar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2-z^2)(4-x^2-y^2-z^2) \\ \dot{y} = x + y(1-x^2-y^2-z^2)(4-x^2-y^2-z^2) \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

Mostrar que el sistema tiene dos esferas invariantes y que cada plano $z = z_0$ es un conjunto invariante. Dibujar el diagrama de fases y determinar el conjunto límite de todas las trayectorias.

6. Considerar el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} = z. \end{cases}$$

Probar que existen dos orbitas periódicas Γ_1, Γ_2 en el plano x, y y determinar su estabilidad. Mostrar que existen dos cilindros invariantes y describir las variedades $W^s(\Gamma_j)$ y $W^u(\Gamma_j)$ para $j = 1, 2$.

Definición: Dada un función $f \in C^1(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$, un punto $x_0 \in \mathrm{R}^n$ se denomina no errante para el sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$ si para todo entorno U de x_0 existe una sucesión de tiempos positivos $t_n \to \infty$ tal que $\varphi_{t_n}(U) \cap U \neq \emptyset$ para todo t_n. $\Omega(f)$ denota el conjunto de puntos no errantes.

7. Dada $f \in C^1(\mathrm{R}^n)$ mostrar que:

   a) $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado e invariate bajo el flujo asociado a el problema $\dot{x} = f(x)$;

   b) $\Omega(f)$ contiene a todas las orbitas periodicas;

   c) $\omega(x) \subset \Omega(f)$ para todo $x \in \mathrm{R}^n$.

8. *a*) Sean $D \subset \mathrm{R}^2$ un abierto simplemnte conexo y $f \in C^1(\mathrm{R}^2)$. Probar que si la divergencia de f tiene signo constante y no identicamente cero en D entonces $\dot{x} = f(x)$ no tiene orbitas periodicas totalmente contenidas en D.

   b) Mostrar que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + x_2 x_1^2, \end{cases}$$

   no tiene orbitas periodicas no triviales.

9. Mostrar que

$$\begin{cases} \dot{x} = y + y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

es un sistema Hamiltoniano. Mostrar que el origen es una silla y que $(\pm 1, 0)$ son centros. Dibuajar las dos órbitas homoclínicas, y esbozar el diagrama de fases (observar la existencia de una separatriz compuesta).

Función de Poincaré

10. Sea

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} = z. \end{cases}$$

resolver el sistema en coordenadas cilindricas, fijar $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, sea el plano

$$\Sigma = \{x \in \mathrm{R}^3 | \theta = \theta_0,\ r > 0,\ z \in \mathrm{R}\}$$

y determinar el mapa de Poincaré $P(r_0, z_0)$ donde $P : \Sigma \to \Sigma$. Calcular $DP(r_0, z_0)$ y probar que $DP(1, 0) = e^{2\pi B}$ donde B es la matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: En los siguientes dos ejercicios no usar el Teorema de Poincaré-Bendixson.

11. Sea $A \subset \mathrm{R}^2$ el anillo $A = \{z \in \mathrm{R}^2 \,/\, 1 \leq |z| \leq 2\}$. Sea f un campo C^1 en un entorno de A, que apunta hacia adentro de A en los bordes. Si cada segmento radial es una sección local, probar que hay una trayectoria periódica en A.

12. Sea x un punto recurrente de un sistema dinámico C^1 planar, es decir, $\exists\, t_n \to \infty$ tal que $\varphi(t_n, x) \to x$, cuando $n \to \infty$.

    a) Probar que x es periódico.

    b) Mostrar con un ejemplo que puede haber puntos recurrentes que no sean periódicos en dimensión mayor.

Teorema de Poincaré-Bendixson

13. Sea A una región como la del ejercicio 11. Sea f un campo C^1 en un entorno de A, que apunta hacia adentro de A en los bordes. Supongamos que f no tiene ceros en A.

    a) Probar que hay una órbita cerrada.

    b) Si hay un número finito de órbitas cerradas, mostrar que al menos una de ellas tiene órbitas que se espiralan hacia ella de ambos lados (es decir, es un ciclo límite estable).

14. Sea $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, C^1 y sin ceros. Mostrar que toda órbita es un conjunto cerrado.

15. Sea $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, C^1. Probar que si el flujo generado por f preserva áreas, no hay ciclos límites.

16. Probar que la ecuación $\ddot{x} = \dot{x}^2 + (1 + x^2)$ no tiene orbitas periódicas.

17. Mostrar que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x + (x^2 + 2y^2)x \\ \dot{y} = x - y + (x^2 + 2y^2)y \end{cases}$$

tiene exactamente una órbita periódica.