

## Práctica 4: Sistemas Lineales

---

### Algunos Resultados Algebraicos

1. Probar que una matriz es nilpotente si y sólo si todos sus autovalores son nulos.
2. Sean  $A, B : I \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$  diferenciables. Probar que

a)  $\frac{d}{dt}A(t)B(t) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t)$ .

b) Si  $\det(A(t)) \neq 0$  entonces  $\frac{d}{dt}A(t)^{-1} = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}$ .

c)  $\frac{d}{dt}(\det A(t)) = \sum \det(a_1(t), \dots, \dot{a}_j(t), \dots, a_n(t))$ , donde  $a_j(t)$  representa la columna  $j$  de  $A(t)$ .

3. Mostrar que para toda matriz  $A$  de  $n \times n$  se tiene que

$$\det(Id + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + o(\varepsilon).$$

### Sistemas con Coeficiente Constantes

4. a) Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas. En II., IV. y V. resolver además el problema de valores iniciales.

I)  $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$

IV)  $\begin{cases} \dot{x} = -2y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$

II)  $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$

V)  $\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = -x + y & y(0) = 1 \end{cases}$

III)  $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

- b) ¿Cuáles son las soluciones  $(x(t), y(t))$  que verifican

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x(t), y(t))\| = 0?$$

¿Cuáles verifican

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x(t), y(t))\| = \infty?$$

- c) Esbozar los diagramas de fases.

5. Sea  $A$  una matriz de  $2 \times 2$  con autovalores reales  $\lambda$  y  $\mu$  asociados respectivamente a los autovectores  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$ . Esbozar el diagrama de fases de  $x' = Ax$  si



10. Utilice el método de variación de las constantes para hallar la solución general del sistema

$$x' = Ax + b(t) \quad (1)$$

donde  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuo.

11. Resuelva el sistema no homogéneo (1) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

y condición inicial  $x(0) = (1, 0)$ .

12. Encontrar todas las soluciones de:

$$\begin{cases} x' = y + \exp(2t) \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases}$$

13. Encontrar la solución de

$$\begin{cases} x' = x + 3y + t \\ y' = -y - \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

a) que verifique  $x(1) = 2$   $y(1) = 7$

b) que verifique  $x(1) = 0$   $y(1) = 0$

14. Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  de números reales o complejos.

a) Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( Id + \frac{A}{n} \right)^n = e^A.$$

b) Probar que  $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$ .

## Estabilidad

15. Halle los subespacios estables, inestables y centrales ( $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$ ) del sistema lineal

$$x' = Ax \quad (2)$$

para las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En cada caso, también esboce el diagrama de fases. ¿Cuáles de estas matrices define un flujo hiperbólico,  $e^{At}$ ?

16. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $x(t)$  la solución de (2) con  $x(0) = x_0$ . Muestre que
- si  $x_0 \in E^s - \{0\}$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = \infty$ ;
  - si  $x_0 \in E^u - \{0\}$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ ;
  - si  $x_0 \in E^c - \{0\}$  y  $A$  es semisimple, entonces existen constantes positivas  $m$  y  $M$  tales que, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $m \leq |x(t)| \leq M$ .
17. Muestre que las únicas rectas invariantes para el sistema lineal (2) con  $x \in \mathbb{R}^2$  son las líneas  $ax + by = 0$  donde  $v = (-b, a)$  es un autovector de  $A$ .

### Sistemas No Autónomos

18. Pruebe el siguiente Teorema:

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  continua para  $t \geq t_0$ .

Probar que si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa y que si  $\|B(t)\| \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +\infty$ ), entonces las soluciones de

$$x' = Ax + B(t)x \quad (3)$$

verifican  $x(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) (y luego, 0 es asintóticamente estable).

19. Determine la estabilidad de  $x = 0$  para el sistema (3) si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 & 0 \\ te^{-t^2} & t^2 e^{-t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}.$$

20. Para qué valores de  $a$  es la solución  $x = 0$  asintóticamente estable o inestable (ignore los casos con autovalores de parte real cero) para el siguiente sistema

$$x' = A(t)x$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & 1 + e^{-t} \\ (2-a)\frac{1-t}{t} & -1 & a\frac{1-t}{t} \end{pmatrix}.$$

21. **Formula de Liouville.** Sea  $\varphi(t)$  una matriz cuyas columnas son las soluciones del sistema

$$x' = A(t)x, \quad (4)$$

donde  $A(t) = (a_{ij}(t))$  es una matriz de  $n \times n$  cuyos elementos son funciones continuas en un intervalo  $I$ . Probar que para todo  $t \in I$  y  $t_0 \in I$  fijo

$$\det(\varphi(t)) = \det(\varphi(t_0)) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}.$$

22. Sea  $A(t)$  diferenciable y antisimétrica en un intervalo  $I$  y  $\varphi(t)$  una matriz cuyas columnas son las soluciones del sistema (4). Probar que  $\varphi(t)^T \varphi(t) = C$ , donde  $\varphi(t)^T$  es la transpuesta de  $\varphi(t)$ . Concluir que, si  $\varphi(t_0)$  es ortogonal para algún  $t_0 \in I$ , entonces  $\varphi(t)$  es ortogonal para todo  $t \in I$ .