Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer Cuatrimestre - 2010

Práctica 3: Ecuaciones Diferenciales de 2do Orden

1. Sean p, q y f funciones continuas en (a, b). Si t_0 es cualquier punto en (a, b) y si x_0, v_0 son números arbitrarios, entonces el problema de volores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \end{cases}$$

tiene una y sólo una solución $x(t)$ en (a, b).

2. *a*) Sean x_1 y x_2 dos soluciones de

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0, \tag{1}$$

donde p, q son funciones continuas en (a, b). Probar que

$$W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} \quad \forall t \in (a, b)$$

donde $t_0 \in (a, b)$.
Hint: Calular la derivada de $W(x_1, x_2)$ respecto de t

b) Usar el resultado anterior, para probar que si x_1 y x_2 son dos soluciones l.i. de (1) entonces $W(x_1, x_2) \neq 0$ en (a, b).

3. *a*) Sean $p, q \in \mathrm{R}$ y x una solución de

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0. \tag{2}$$

Dado $t_0 \in \mathrm{R}$, demostrar, sin utilizar el Lema de Gronwall, que

$$\|x(t_0)\|e^{-k|t-t_0|} \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|e^{k|t-t_0|} \quad \forall t \in \mathrm{R}$$

donde

$$\|x(t)\| = \left(|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad k = 1 + |p| + |q|.$$

b) Concluir de este resultado la continuidad respecto de los datos iniciales.

4. Sea x_1 una solución no nula de (1) hallar $v : (a, b) \to \mathrm{R}$ de manera que $x_2 = vx_1$ sea solución de (1) y x_1 y x_2 resulten l.i.

5. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones homegéneas

   a) $x'' - 8x' + 16x = 0$

   b) $x'' - 2x' + 10x = 0$

   c) $x'' - x' - 2x = 0$

6. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones

   a) $x'' - 4x' + 4x = t$
   b) $x'' + 2x' + x = e^{2t}$
   c) $x'' - 2x' + 5x = e^t cos(2t)$

7. Hallar todas las soluciones de $x'' - x' - 2x = 0$ y de $x'' - x' - 2x = e^{-t}$ que verifiquen:

   a) $x(0) = 0 \; x'(0) = 1$
   b) $x(0) = x'(0) = 0$
   c) $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$
   d) $x'(0) = 1$

8. Sean p y q constantes positivas y $f : (0, +\infty) \to \mathrm{R}$ una función continua, mostrar que, para toda φ_1 y φ_2 soluciones de

$$x'' + px' + qx = f(t)$$

   tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0.$$

9. *a*) Sean $n \in \mathbb{N}_0$ y x_n una solución del problema

$$\begin{cases} \ddot{x} + n^2 x = 0 \\ x(0) = x(2\pi) \text{ y } \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi). \end{cases}$$

   Probar que

$$\int_0^{2\pi} x_n(t) x_m(t) \; dt = 0 \quad \forall n \neq m.$$

   b) concluir del item anterior que, para todo

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt) \; dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt)\cos(mt) \; dt = 0$$

   y

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt)\operatorname{sen}(mt) \; dt = 0$$

   si $n \neq m$.

Soluciones Analiticas

10. Sea $t_0 \in \mathrm{R}$ y supongamos que p y q son dos funciones que tienen un desarrollo en series de potencias de $(t - t_0)$ convergente sobre el intervalo

$$|t - t_0| < r_0 \quad (r_0 > 0).$$

Sean $a_0, a_2 \in \mathrm{R}$ arbitrarios. Probar que existe una solución ϕ del problema

$$\begin{cases} \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \\ x(t_0) = a_0 \quad \dot{x}(t_0) = a_1 \end{cases}$$

con una expansión en series de potencias

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k.$$

convergente en $|t - t_0| < r_0$.

11. Resolver, utilizando series, las siguientes ecuaciones en un entorno del origen e indicar el radio de convergencia:

    a) $x'' - tx = 0$

    b) $x'' - t^2 x = 0$

12. **Ecuación de Legendre**. Determinar dos soluciones l.i. de

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + \lambda(\lambda + 1)x = 0 \quad -1 < t < 1$$

donde $\lambda \in \mathrm{R}$. Mostrar que cuando $\lambda \in \mathbb{N}$, una de esas soluciones es un polinomio.

Hint: Usar series de potencias centradas en 0.

13. **Ecuación de Hermite**. Determinar dos soluciones l.i. de la ecuación

$$x'' - 2tx' + 2\lambda x = 0,$$

$\lambda \in \mathrm{R}$. Mostrar que si $\lambda \in \mathbb{N}$ una de esas soluciones es un polinomio.

Teoria de Sturm-Liouville

14. **Teorema de Separación de Sturm**. Sean ν_1 y ν_2 dos soluciones reales de la ecuación

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

donde p y q son funciones continuas. Demostrar que si ν_1 y ν_2 son l.i. y si t_1 y t_2 son ceros consecutivos de ν_1 entonces existe $t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $\nu_2(t_0) = 0$. Es decir, los ceros de ν_1 y ν_2 son alternados.

Hint: mirar el signo del Wronskiano.

15. **Teorema de comparación de Sturm**. Sean ν_1 y ν_2 dos soluciones reales no triviales de

$$x'' + k_1(t)x = 0, \tag{3}$$
$$x'' + k_2(t)x = 0, \tag{4}$$

respectivamente, donde k_1 y k_2 son dos funciones continuas tales que $k_1(t) \leq k_2(t)$. Demostrar que si t_1 y t_2 son ceros consecutivos de ν_1 y $k_1 \neq k_2$ en (t_1, t_2) entonces existe $t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $\nu_2(t_0) = 0$.

Hint: Multiplicar (3) por ν_2 y la ecuación (4) por ν_1, restar e integrar en $[t_1, t_2]$. Finalmente, comparar los signos.

16. Considerar la ecuación
$$x'' + k(t)x = 0 \tag{5}$$
donde k es continua en $[a, b]$, supongamos que $k(t) \leq 0$ en $[a, b]$. Demostrar que las soluciones no triviales de la ecuación solo tienen un cero en $[a, b]$.

17. Consideremos la ecuación (5), supongamos $c^2 \leq k(t) \leq K^2$ en $[a, b]$ donde $0 < c < K$ y sea además ν una solución no trivial de (5).

    a) Demostrar que si t_1, t_2 son ceros consecutivos de ν en $[a, b]$ enonces
    $$\frac{\pi}{K} \leq t_2 - t_1 \leq \frac{\pi}{c}.$$

    b) Concluir que si $\nu(a) = \nu(b) = 0$ y ν tiene exactamente $N - 1$ ceros en (a, b) enontes
    $$\frac{c(b-a)}{\pi} \leq N \leq \frac{K(b-a)}{\pi}.$$

18. Consideremos la ecuación de Airy
$$x'' - tx = 0 \quad t \leq 0.$$

    a) Demostrar que cualquier solución (no trivial) tiene una cantidad infinita de ceros. Es decir, para cada solución existe $0 \geq \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \ldots$ tales que $u(\lambda_n) = 0$.

    b) Encontrar una expresión asintotica para λ_n.

Dinámica en un campo de fuerzas conservativo.

Dado $V(x) \in C^2(\mathbb{R})$ consideremos la ecuación diferencial
$$\ddot{x} = -V'(x).$$
que toma la siguiente forma de sistema en el plano de fases
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases}$$

En mecánica $V(x)$ es el potencial y $-V'(x)$ es la fuerza.

19. Demostrar que la energía

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$$

es una constante del movimiento. El primer término es el de la energía cinética y el segundo, la potencial.

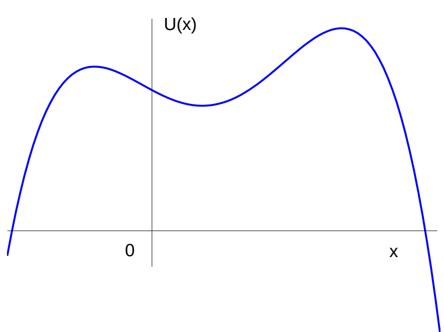
20. Considerar $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Esbozar el diagrama de fases considerando diferentes ni veles de la energía $H(x,y)$. Verificar que todas las trayectorias son acotadas. Utilizar la cantidad conservada obtenida en el punto anterior para obtener la posición máxima en funcion del dato inicial. Este potencial es el del oscilador armónico, es decir un resorte sin la acción de fuerzas externas.

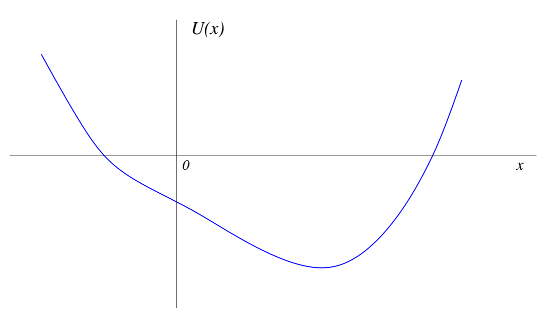
21. $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$ es el potencial que da origen a la fuerza a la que está sometida una masa m que cuelga de un resorte con costante k (llamamos x a la posición aunque el movimiento se desarrolla en sentido vertical para no confundir con la variable y del plano de fases que representa la velocidad). Compare este caso con el del ejercicio anterior.

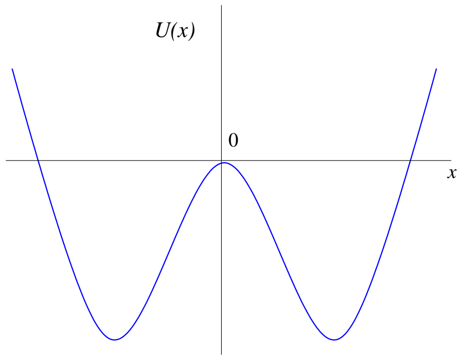
22. Considerar el potencial $V(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x}$, con $x > 0$, $a > 0$. Esbozar el diagrama de fases considerando diferentes niveles de la energía. Describir cualitativamente el movimiento para valores iniciales tales que la energía sea positiva, negativa o nula. Se trata del movimiento radial (es decir, x representa la distancia al origen) de una partícula sometida a un campo gravitatorio, la cantidad $\frac{1}{x^2}$ suele interpretarse como un *potencial centrífugo*, y $V(x)$ es el *potencial eficaz.*

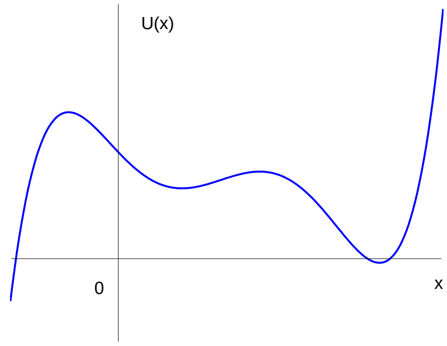
23. Considerar el potencial del punto anterior. Fijado x_0 obtener el valor mínimo de $|y_0|$ para el cual la trayectoria cuyo nivel de energía es $H(x_0, y_0)$ es no acotada. (La cantidad y_0 es la *velocidad de escape.*)

24. Hacer el bosquejo del diagrama de fases de los siguientes potenciales,






U(x)
0
x


U(x)
0
x